Exercice Cardinal d'une tribu

Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Pour tout $x \in E$, on définit I'atome de la tribu $\mathcal{E}$ engendré par x par

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{E},\, x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{E}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{E}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{E}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{E}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.
4. Quel est le cardinal d'une tribu finie ?

Remarque : D'après la définition de l'atome engendré par x, si $x \in A$ où $A \in \mathcal{E}$, $\dot{x} \subset A$. C'est ceci qui servira dans la suite.

Question 1 : Du fait que $E = \bigcup_{x \in E} \{x\}$, $E = \bigcup_{x \in E} \dot{x}$. Reste à montrer qu'ils sont disjoints, ou égaux.
Soit $x, y \in E$ tels que $\dot{x} \cap \dot{y} \neq \emptyset$. On prend alors $z \in \dot{x} \cap \dot{y}$.
Alors, comme $z \in \dot{x}$ si $A \in \mathcal{E}$ est tel que $x \in A$, alors $z \in A$. De même, si $A \in \mathcal{E}$ est tel que $y \in A$, $z \in A$.
On suppose qu'il existe $B \in \mathcal{E}$ tel que $x \in B, y \notin B$.
D'une part : $x \in B$ donc $z \in B$. D'autre part : $y \notin B$ donc $y \in B^c$ donc $z \in B^c$.
C'est absurde. Donc si $x \in B, y \in B$. De même, si $y \in B, x \in B$. Donc $x \in B \iff y \in B$. Donc $\dot{x} = \dot{y}$.

Question 2 :
Comme $\mathcal{E}$ est dénombrable l'intersection qui définit $\dot{x}$ est une intersection au plus dénombrable d'éléments de $\mathcal{E}$ qui vit donc bien dans $\mathcal{E}$ par stabilité. Enfin, $A = \bigcup_{x \in A} \dot{x}$. Le nombre d'atome étant au plus dénombrable, l'union est au plus dénombrable. De plus, d'après la question précédente, cette écriture est unique.

Question 3 :
On vient de dire que l'écriture $A = \bigcup_{x \in A} \dot{x}$ est unique. C'est à dire que les éléments de la tribu sont en bijection avec les parties d'atomes. Si il y a un nombre infini d'atomes, la tribu étant dénombrable, il y a donc $|\mathcal{P}(\mathbb{N})|$ éléments dans la tribu. Mais $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable. En effet, soit on sait que son cardinal est celui de $\mathbb{R}$ qui n'est pas dénombrable, soit on le montre à la main en montrant qu'il n'y a pas de bijection $\varphi : X \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, en regardant la partie $\{x \in X, x \notin \varphi(x)\}$, et en montrant qu'elle n'a pas d'antécédent.

Question 4 : Dans ce cas, si il y a n atomes, il y a $|\{1, \cdots n\}| = 2^n$ éléments dans la tribu.