TD 1 : Tribus, classes monotones

Exercice 1. *Tribus images*
Soient X et Y des ensembles et f une application de X dans Y.

1. Montrer que si $\mathcal{G}$ est une tribu sur Y, $f^{-1}(\mathcal{G}) := \{f^{-1}(G),\ G \in \mathcal{G}\}$ est une tribu sur X.
2. Montrer que si $\mathcal{F}$ est une tribu sur X, $\mathcal{G} := \{A \subset Y, f^{-1}(A) \in \mathcal{F}\}$ est une tribu sur Y.
3. Montrer que pour toute partie $\mathcal{C} \subset Y$, on a $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.

Exercice 2. *Tribu engendrée par les singletons*
Soit E un ensemble, S l'ensemble des singletons de E. Déterminer la tribu engendrée par S.

Exercice 3. *Classes monotones et tribus*

1. Une union de tribus est-elle une tribu ? Une union croissante de tribus est-elle une tribu ? Si non, donner un/des contre-exemples.
2. Montrer qu'une classe monotone $\mathcal{M}$ est une tribu si et seulement si c'est un $\pi-$système, i.e. ssi $\mathcal{M}$ est stable par intersection.

Exercice 4. *Cardinal d'une tribu*
Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de tribu infinie dénombrable. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Pour tout $x \in E$, on définit l'atome de la tribu $\mathcal{E}$ engendré par x par

$$\dot{x} = \bigcap_{\{A \in \mathcal{E},\, x \in A\}} A.$$

1. Montrer que les atomes de $\mathcal{E}$ forment une partition de E.
2. Montrer que si $\mathcal{E}$ est au plus dénombrable alors $\mathcal{E}$ contient ses atomes et que chaque élément de $\mathcal{E}$ s'écrit comme une réunion au plus dénombrable d'atomes.
3. Conclure.
4. Quel est le cardinal d'une tribu finie ?

Exercice 5. *Anticipation sur la notion d'indépendance*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. On dit que deux événements $A, B \in \mathcal{F}$ sont indépendants si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$. Plus généralement, on dit que deux familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ d'événements sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{G}$ et $B \in \mathcal{H}$, A et B sont indépendants.

1. Soit $\mathcal{A}$ est une famille d'ensembles stable par intersection finie et indépendante d'une tribu $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, montrer que la tribu engendrée $\sigma(\mathcal{A})$ est encore indépendante de la tribu $\mathcal{G}$.
2. Soient $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ des familles d'événements stables par intersection. Montrer que les deux familles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{H}$ sont indépendantes si et seulement si les tribus $\sigma(\mathcal{G})$ et $\sigma(\mathcal{H})$ qu'elles engendrent sont indépendantes.
3. Montrer par un exemple que l'hypothèse de stabilité par intersection est nécessaire.

Exercice 6. *Version fonctionnelle du lemme de classes monotones*
Soit H un espace vectoriel de fonctions réelles bornées sur un ensemble Ω et soit $\mathcal{E}$ un $\pi-$système contenant Ω. On suppose que

1. $\forall A \in \mathcal{E}$, $\mathbb{1}_A \in H$,
2. Si $(f_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de fonctions positives de H convergeant vers une fonction f bornée, alors $f \in H$.

Montrer que H contient toutes les fonctions $\sigma(\mathcal{E})-$mesurables.