TD 2 : Probabilités élémentaires

Exercice 1. *Formule du crible*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Montrer que si $(A_k)_{1\leq k\leq n}$ est une famille d'évènements, alors

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{\substack{I\subset\{1,\ldots,n\}\\ I\neq\emptyset}} (-1)^{\# I-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{k\in I} A_k\right).$$

On pourra soit procéder par récurrence, soit remarquer que l'on a l'égalité suivante :

$$(1-\mathbf{1}_{A_1})(1-\mathbf{1}_{A_2})\cdots(1-\mathbf{1}_{A_n}) = 1-\mathbf{1}_{\cup_{i=1}^{N} A_i},$$

puis développer le produit.

En utilisant des indicatrices, montrer que

$$\sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_j) - \sum_{\leq j<k\leq n}\mathbb{P}(A_j\cap A_k) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n}\mathbb{P}(A_j).$$

Exercice 2. *Convergence monotone pour les probabilités*
Soient un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$ et $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to [0, +\infty[$ une application additive, autrement dit $\mathbb{P}(A\cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ lorsque $A, B \in \mathcal{F}$ et $A\cap B = \emptyset$, telle que $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :

1. $\mathbb{P}$ est une probabilité, i.e. elle est $\sigma-$additive.
2. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites croissantes :
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \subset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n).$$
3. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes :
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n).$$
4. $\mathbb{P}$ est continue sur des suites décroissantes vers $\emptyset$:
$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}, A_n \supset A_{n+1} \text{ et } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to+\infty}\mathbb{P}(A_n) = 0.$$

Exercice 3. *Limites inférieure et supérieure*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. On considère une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ et on note

$$\liminf_{n\to+\infty} A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}\bigcap_{m\geq n} A_m, \quad \limsup_{n\to+\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\bigcup_{m\geq n} A_m.$$

1. Montrer que $\omega \in \liminf_n A_n$ ssi à partir d'un certain rang, ω est dans tous les A_n.
2. Montrer que $\omega \in \limsup_n A_n$ ssi ω est dans une infinité de A_n.
3. Montrer que $\mathbb{P}(\liminf_n A_n) \leq \liminf_n \mathbb{P}(A_n) \leq \limsup_n \mathbb{P}(A_n) \leq \mathbb{P}(\limsup_n A_n)$.
4. On dit que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente si $\liminf_n A_n = \limsup_n A_n$. Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, alors elle est convergente et préciser la limite.
5. Montrer que si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on a alors la propriété de continuité de la mesure $\mathbb{P}(\lim_n A_n) = \lim_{n\to+\infty} \mathbb{P}(A_n)$.

Exercice 4. *Limites inférieure et supérieure, suite*
Décrire les ensembles $\liminf_n A_n$ et $\limsup_n A_n$ dans les cas suivantes

1. $A_n =]-\infty, n]$;
2. $A_n =]-\infty, -n]$;
3. $A_{2n} = A$, $A_{2n+1} = B$;
4. $A_n =]-\infty, (-1)^n]$.

Exercice 5. *Premier lemme de Borel–Cantelli*
On considère un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite d'événements qui est telle que $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$. Montrer que $\mathbb{P}(\limsup_n A_n) = 0$.

Exercice 6. *Presque sûr*
On dit qu'un évènement $A \in \mathcal{F}$ est presque sûr si A est presque surement égal à Ω, c'est-à-dire $\Omega = A \cup N$ avec N un ensemble négligeable, i.e. il existe $B \in \mathcal{F}$ avec $N \subset B$ et $\mathbb{P}(B) = 0$. Soit K un ensemble d'indices au plus dénombrable et $(A_k)_{k\in K}$ une famille d'évènements presque sûrs. Montrer que $\bigcap_{k\in K} A_k$ est presque sûr.

Exercice 7. *Tribu complétée*
Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit la famille d'ensembles suivante :

$$\overline{\mathcal{F}} := \{C \in \mathcal{P}(\Omega) : \exists A_1, A_2 \in \mathcal{F}, \text{tels que } A_1 \subset C \subset A_2 \text{ et } \mathbb{P}(A_2 \backslash A_1) = 0\}.$$

1. Montrer que $\overline{\mathcal{F}}$ est une tribu et plus précisément $\overline{\mathcal{F}} = \sigma(\mathcal{F} \cup \mathcal{N})$ où $\mathcal{N}$ est la classe des ensembles $\mathbb{P}-$négligeables, c'est-à-dire $\mathcal{N} := \{N \subset \Omega : \exists B \in \mathcal{F} : N \subset B, \mathbb{P}(B) = 0\}$.
2. On définit une nouvelle mesure $\overline{\mathbb{P}}$ sur $\overline{\mathcal{F}}$ par $\overline{\mathbb{P}}(C) := \mathbb{P}(A_1) = \mathbb{P}(A_2)$. Montrer que $\overline{\mathbb{P}}$ est bien définie, i.e. que sa valeur ne dépend par du choix des encadrants A_1 et A_2, et que $\overline{\mathbb{P}}$ est l'unique mesure sur la tribu complétée $\overline{\mathcal{F}}$ qui prolonge $\mathbb{P}$, i.e. qui coincide avec $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}$.
3. Montrer que pour toute fonction $X : \Omega \to \mathbb{R}$ qui est $\overline{\mathcal{F}}-$mesurable, il existe des fonctions $\mathcal{F}-$mesurables $U, V : \Omega \to \mathbb{R}$, telles que $U \leq X \leq V$ et $V - U = 0$, $\mathbb{P}-$presque sûrement.
4. Déterminer $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})}$ pour δ_a où $a \in \mathbb{R}$.
5. **DENC**[1] **:** A-t-on $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mathcal{P}(\mathbb{R})$ pour la mesure de Lebesgue ? A-t-on $\overline{\mathcal{B}(\mathbb{R})} = \mathcal{B}(\mathbb{R})$?

Quand $\mathcal{F} = \overline{\mathcal{F}}$, on dit que la tribu $\mathcal{F}$ est complète.

1. Difficile et Nécessite de la Culture

Exercice 8. *Support d'une mesure*
Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement sur un espace métrique séparable localement compact). On définit le support de la mesure μ comme l'ensemble

$$S := \{x \in \mathbb{R}^n ; \mu(B(x,r)) > 0, \text{ pour tout } r > 0\}.$$

Montrer que S est fermé, que $\mu(\mathbb{R}^n \backslash S) = 0$, et que $\mu(S \backslash F) = \mu(\mathbb{R}^n \backslash F) > 0$ pour tout fermé F strictement contenu dans S.