TD 3 : Variables aléatoires, indépendance.

Exercice 1. *Mesurabilité et tribu triviale*
Montrer qu'une application $X : \Omega \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est une variable aléatoire par rapport à la tribu triviale sur Ω si et seulement si elle est constante.

Exercice 2. *Limsup et liminf, le retour*
Soit $(X_n)_{n\in N}$ une suite de va. réelles définies sur un espace mesurable $(\Omega, \mathcal{F})$

1. Comparer les ensembles $\{\limsup_n X_n > 1\}$, $\limsup_n \{X_n > 1\}$, $\{\limsup_n X_n \geq 1\}$ et $\limsup_n \{X_n \geq 1\}$.
2. Comparer les ensembles $\{\liminf_n X_n > 1\}$, $\liminf_n \{X_n > 1\}$, $\{\liminf_n X_n \geq 1\}$ et $\liminf_n \{X_n \geq 1\}$.

Exercice 3. *Copies ordonnées*
Soient X, Y deux variables aléatoires réelles sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1. On suppose que $\mathbb{P}(Y \leq t < X) = 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, montrer que $\mathbb{P}(Y < X) = 0$.
2. On suppose maintenant que X et Y ont même loi. Montrer que si $X \leq Y$ p.s. alors X et Y sont presque sûrement égales.

Exercice 4. *Min et max de variables indépendantes*
Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires réelles indépendantes et de même loi, définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On désigne par F leur fonction de répartition commune. Déterminer les fonctions de répartitions de $m = \min_{i=1\ldots n} X_i$ et $M = \max_{i=1\ldots n} X_i$.

Exercice 5. *Parties entières et fractionnaires d'une exponentielle*
Soit X une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, i.e. X est une variable aléatoire positive telle que $\mathbb{P}(X \geq t) = e^{-\lambda t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la loi de la partie entière $\lfloor X \rfloor$ et de la partie fractionnaire $\{X\} := X - \lfloor X \rfloor$.
2. Les variables $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 6. *Sur les variables uniformes*
L'objet de l'exercice est de montrer que la loi uniforme n'est pas "divisible".

1. Montrer qu'il n'existe aucun vecteur $(a, b, c, d, \lambda) \in (0, +\infty)^5$ tel que
$$ab = \lambda, \quad cd = \lambda, \quad \text{et} \quad ac + bd \leq \lambda.$$
2. Soit $n \geq 1$. Existe-t-il deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\{0, \ldots, n\}$ et chargeant tous les points dont la somme suit une loi uniforme sur $\{0, \ldots, 2n\}$?

Exercice 7. *Entropie d'une variable discrète*
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini $\{x_1, \ldots, x_n\}$, avec $\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. On définit l'entropie de X par

$$H(X) := -\sum_{i=1}^{n} p_i \ln (p_i)$$

avec la convention $x \ln x = 0$ si $x = 0$.

1. Démontrer que $H(X) \geq 0$.
2. Démontrer que $H(X) = 0$ si et seulement si X est presque surement constante, c'est-à-dire s'il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $p_i = 1$.
3. Vérifier que, pour tout $k = 1, \ldots, n$, on a $(-np_k) \ln (np_k) \leq 1 - np_k$, avec égalité ssi $np_k = 1$.
4. En déduire que $H(X) \leq \ln n$.
5. Démontrer que $H(X) = \ln n$ si et seulement si X est équidistribuée, ie si $p_i = 1/n$ pour tout $i = 1, \ldots, n$.

Exercice 8. *Produit eulérien*
Sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et dont la loi est donnée par

$$\mathbb{P}_X(\{n\}) = \mathbb{P}(X = n) := \frac{1}{n^s \, \zeta(s)}, \quad \text{avec } \ s > 1.$$

1. Pour $k \geq 1$, on désigne par E_k l'événement "k divise X". Montrer que
$$\mathbb{P}_X(E_k) = \frac{1}{k^s}.$$
2. Si $(p_i)_{i=1}^{n}$ sont des nombres premiers distincts, montrer que les événements E_{p_i} sont indépendants :
$$\mathbb{P}_X \left(\bigcap_{i=1}^{n} E_{p_i} \right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}\left(E_{p_i}\right).$$
3. En déduire la représentation en produit eulérien de la fonction Zeta
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right).$$
4. En dd́uire la divergence de la s'erie $\sum_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{p}$.

Exercice 9. *Pile ou face*
On lance une infinité de fois une pièce de monnaie équilibrée. On fixe un entier m arbitrairement grand. Montrer qu'avec probabilité 1, on obtiendra une infinité de fois m piles consécutifs. Généraliser.

Exercice 10. *Indécomposabilité de la loi de Poisson - Agrég (leçons séries entières, analyse complexe, probas)* Le but de cet exercice est de montrer le résultat suivant :

Soit Z une variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ. Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ telles que $Z = X + Y$. Alors X et Y suivent des lois de Poisson. (On sait déjà que la réciproque est vraie : si X et Y suivent des lois de Poisson et sont indépendantes, $X + Y$ suit une loi de Poisson).

1. Rappeler la fonction génératrice G_Z de Z. Donner la formule liant G_Z, G_X, G_Y et son domaine de validité.
2. Montrer que G_X et G_Y sont entières (c'est à dire développable en série entière avec un rayon de convergence infini). On pourra regarder $\mathbb{P}(X = n)\mathbb{P}(Y = 0)$.
3. Expliquer pourquoi la formule établie dans la première question reste valable sur $\mathbb{C}$.
4. Justifier qu'il existe F, G analytiques telles que $G_X = e^F$ et $G_Y = e^G$.
5. Nous cherchons maintenant à identifier F et G. Soit $z \in \mathbb{C}$, $r = |z| \geq 1$. Justifier que $|G_X(z)| \leq G_Y(r)$, puis que $\mathbb{P}(Y = 0)G_X(r) \leq e^{\lambda(r-1)}$. Enfin, montrer que
$$Re(F(z)) \leq \ln\left(\frac{G_Y(r)}{P(Y = 0)}\right) + \lambda\left(|z| - 1\right)$$
6. Conclure, en utilisant le lemme suivant :

   Théorème. *Soit $f = u+iv$ une fonction entière, $f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$, $A(r) = \sup_{|z|=r} Ref(z)$. Alors :*
   - *Pour tout $n \geq 1, r > 0, |a_n| \leq 2\frac{A(r)-A(0)}{r^n}$*
   - *Si $d \geq 0$ est tel que $A(r) = \mathcal{O}(r^d)$ alors f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à d.*
7. Montrer le lemme (on pourra utiliser, notamment, la représentation intégrale des coefficients).

Sources : Quéfellec & Quéfellec - Analyse complexe, site web de Geoffrey Deperle