

TD 4 : LOI DES VARIABLES ALÉATOIRES

Exercice 1. *Parties entières et fractionnaires d'une exponentielle*

Soit X une variable exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de la partie entière $\lfloor X \rfloor$ et de la partie fractionnaire $\{X\} := X - \lfloor X \rfloor$.
2. Les variables $\lfloor X \rfloor$ et $\{X\}$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 2. *Une fonction de répartition*

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X dont la fonction de répartition vaut

$$F_X(t) = (1 + e^{-t})^{-1}, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

2. La variable X admet-elle une densité f_X ? Si oui, explicitez cette densité.
3. On définit de nouvelles variables en posant $U := e^X$, $V := \mathbb{1}_{\{0 < X < \log(2)\}}$ et $W := X \mathbb{1}_{\{0 < X < 1\}}$. Déterminer les lois des variables U, V et W .

Exercice 3. *Pesked ha farz*

1. Montrer qu'il existe une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ telle que

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{e^{-2}}{2} \frac{2^k}{k!} + a \frac{3^k}{k!}, \quad \forall k \in \mathbb{N},$$

pour une unique valeur de a que l'on déterminera.

2. Exprimer X à l'aide de deux variables de Poisson indépendantes.

Exercice 4. *Densités et marginales*

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires dont la densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$f_{X,Y}(x, y) = c y \mathbb{1}_{[0,2]}(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(y).$$

1. Déterminer la valeur de la constante c . Calculer les densités marginales f_X et f_Y . Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Mêmes questions pour $f(x, y) = c y(x - y) \exp(-(x + y)) \mathbb{1}_{0 \leq y \leq x}$.

Exercice 5. *Couple de variables aléatoire*

Soit (X, Y) un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de densité $(x, y) \mapsto c e^{-x} \mathbb{1}_{0 < |y| < x}$.

1. Quelle est la valeur de c ?
2. Déterminer les lois marginales de X et Y .
3. Quelle est la loi du vecteur $(\frac{X-Y}{2}, \frac{X+Y}{2})$?

Exercice 6. *Somme de variables indépendantes*

1. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi binomiales $\mathcal{B}(n, p)$ et $\mathcal{B}(m, p)$ respectivement, où $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$. Déterminer la loi de $X + Y$. Interpréter ce résultat en terme de jeu de pile ou face.
2. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\mu)$, où $\lambda, \mu > 0$. Déterminer la loi de $X + Y$.
3. Soient X et Y deux variables indépendantes de loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$ et $\Gamma(m, \lambda)$, où $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda > 0$. Particulariser au cas où $n = 1$.

Exercice 7. *Extrema de lois usuelles*

1. Soient X et Y des variables aléatoires indépendantes de loi géométriques $\mathcal{G}(p)$ et $\mathcal{G}(q)$ où $p, q \in]0, 1[$. Déterminer les lois de $X \vee Y = \max(X, Y)$ et $X \wedge Y = \min(X, Y)$.
2. Même question si X et Y sont des variables indépendantes de lois exponentielles $\mathcal{E}(\lambda)$ et $\mathcal{E}(\mu)$, avec $\lambda, \mu > 0$. Calculer $\mathbb{P}(X < Y)$.
3. Soient $U_0, \dots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ et N une variable aléatoire indépendante des $(U_i)_{0 \leq i \leq n}$ de loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ avec $n \geq 1$ et $p \in [0, 1]$. Déterminer la loi de $Z := \min_{0 \leq i \leq N} U_i$.

Exercice 8. *Propriété d'absence de mémoire*

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ (respectivement $\mathbb{N}^*$) vérifie la propriété d'absence de mémoire si

$$\mathbb{P}(X > s + t) = \mathbb{P}(X > s)\mathbb{P}(X > t), \quad \forall s, t \geq 0$$

et respectivement

$$\mathbb{P}(X > k + \ell) = \mathbb{P}(X > k)\mathbb{P}(X > \ell), \quad \forall k, \ell \in \mathbb{N}.$$

1. Montrer que si X suit la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ alors X vérifie la propriété d'absence de mémoire. Étudier la réciproque.
2. Montrer que si X suit la loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ alors X vérifie la propriété d'absence de mémoire. Étudier la réciproque.

Exercice 9. *Quelques transformations remarquables*

1. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur $[-\pi/2, \pi/2]$. Déterminer la loi de $Y = \tan(X)$.
2. Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. Déterminer la loi de la variable $Y = 1/X$.
3. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $\lambda > 0$. Déterminer la loi de la variable $Y = -\frac{1}{\lambda} \log(U)$.
4. Soit ε une variable aléatoire de loi de Rademacher i.e $\mathbb{P}(\varepsilon = -1) = \mathbb{P}(\varepsilon = 1) = 1/2$ et X une variable gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ indépendante de ε . Quelle est la loi de $Y = \varepsilon X$. Généraliser.

Exercice 10. *Fonctions test, lois Gamma et Beta*

Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$.

1. Démontrer que la loi de $X_1 + \dots + X_n$ est une loi Gamma $\Gamma(n, \lambda)$.
2. Démontrer que $\frac{X_1}{X_1 + X_2}$ est indépendant de $X_1 + X_2$, et suit la loi uniforme sur $]0, 1[$.

3. Généraliser la question précédente en déterminant, pour $k = 1, \dots, n-1$, la densité loi de la variable aléatoire

$$\frac{X_1 + \dots + X_k}{X_1 + \dots + X_n},$$

dite de loi Beta et notée $\beta(k, n-k)$.

4. En déduire la valeur de $\int_0^1 x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}dx$.

Exercice 11. *Fonctions test, lois Gamma, le retour*

Soient $X_1, \dots, X_n, X_{n+1}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$ de paramètre 1 ; on pose $S_k := X_1 + \dots + X_k$ pour $k = 1, \dots, n+1$. Vérifier simultanément que le vecteur

$$\left(\frac{X_1}{S_{n+1}}, \frac{X_2}{S_{n+1}}, \dots, \frac{X_{n+1}}{S_{n+1}} \right)$$

est indépendant de S_{n+1} et que la loi du vecteur aléatoire

$$\left(\frac{X_1}{S_{n+1}}, \frac{X_2}{S_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{S_{n+1}} \right)$$

est uniforme sur le simplexe $\Delta = \{y \in]0, \infty[^n; \sum_{k=1}^n y_k < 1\}$.