

TD 5 : MOMENTS

Exercice 1. *Partie entière et inverse d'une variable uniforme*

Soit U une variable aléatoire de loi uniforme $\mathcal{U}_{[0,1]}$ et $X := \lfloor \frac{1}{U} \rfloor$ la partie entière de son inverse.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer la probabilité de l'événement $\{X \geq 100\}$.
3. La variable aléatoire X est-elle intégrable ?

Exercice 2. *Quelques calculs explicites d'espérances*

Calculer les espérances $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[|X|]$, $\mathbb{E}[X^2]$ et $\mathbb{E}[e^{itX}]$ dans les cas suivants :

1. $X \sim U_{[-1,1]}$ i.e. $\mathbb{P}_X(dx) = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{[-1,1]}(x) dx$.
2. $Y \sim \mathcal{E}(\lambda)$, i.e. $\mathbb{P}_X(dx) = \lambda e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{x \geq 0} dx$, pour $\lambda > 0$.
3. $Z \sim \mathcal{P}(\lambda)$, i.e. $\mathbb{P}_X(\{k\}) = e^{-\lambda} \lambda^k / k!$, pour $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 3. *Moments de tout ordre*

Soit X une variable aléatoire réelle de densité

$$f_X(x) = c \left(x \mathbf{1}_{[0,1]}(x) + (2-x) \mathbf{1}_{[1,2]}(x) \right).$$

Déterminer c et calculer les moments $\mathbb{E}[X^n]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4. *Variable de Cauchy tronquée*

Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy. Calculer $\mathbb{E}[\min(|X|, n)]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Explicitiez la limite lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5. *Moments de la gaussienne*

Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, on note $m_k = \mathbb{E}[X^k]$ son $k^{\text{ième}}$ moment.

1. Justifier que les moments impairs de X sont nuls.
2. Montrer que les moments pairs vérifient la formule de récurrence $m_{2k} = (2k-1)m_{2k-2}$ et conclure que $m_{2k} = \frac{(2k)!}{2^k k!}$.
3. Interpréter m_{2k} en terme combinatoire.

Exercice 6. *Moment et queue d'une loi*

Soit X une variable aléatoire positive de fonction de répartition F_X .

1. Soit ϕ une fonction positive strictement croissante de classe C^1 sur $[0, +\infty[$, nulle en 0. Montrer que

$$\mathbb{E}[\phi(X)] = \int_0^{+\infty} \phi'(t) (1 - F_X(t)) dt.$$

2. On suppose de plus que $\phi(X)$ est intégrable. Montrer que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) \mathbb{P}(X > t) = 0.$$

3. Expliciter le cas particulier où $\phi(t) = t^n$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. On suppose maintenant que pour t assez grand, il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{c}{t^\alpha}.$$

Montrer que X admet un moment d'ordre k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ avec $k < \alpha$.

Exercice 7. *Contre-exemple au problème des moments sur $\mathbb{R}^+$*

Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

1. Déterminer tous les moments $\mathbb{E}[X^n]$, $n \geq 1$.
2. Déterminer la densité f_Y de $Y = e^X$ et calculer les moments $\mathbb{E}[Y^n]$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. On considère la famille de variables aléatoires $(Y_a, |a| \leq 1)$, dont les densités sont données par

$$f_{Y_a}(x) = f_Y(x)(1 + a \sin(2\pi \ln(x))), \quad x > 0.$$

Calculer les moments $\mathbb{E}[Y_a^n]$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. En déduire une conclusion intéressante.
5. Soit μ et ν deux mesures de probabilités sur $\mathbb{R}$ à support compact. Montrer que μ et ν sont caractérisées par leurs moments.