Feuille 7 :Convergence des variables aléatoires

Exercice 1. *Longue marche aléatoire*
On considère une suite $(X_n)_{n>0}$ de variables aléatoires toutes indépendantes et de même loi de Rademacher $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. On définit alors $(S_n)_{n\geq 0}$ par $S_0 := 0$ et $S_{n+1} := S_n + X_{n+1}$ pour $n \geq 0$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la fonction caractéristique $\varphi_{S_n/\sqrt{n}}$ converge simplement et expliciter sa limite.

Exercice 2. *Loi des événements rares*
Soit $\lambda > 0$ et $(X_n)_{n>0}$ une suite de variables aléatoires de loi binomiale $X_n \sim \mathcal{B}(n, \lambda/n)$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la fonction caractéristique φ_{X_n} converge simplement et expliciter sa limite.

Exercice 3. *Uniformes et uniforme*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite suite de variables aléatoires telles que X_n suit la loi uniforme dans $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que la suite des fonctions de répartition $F_{X_n/n}$ des variables X_n/n converge et expliciter sa limite. Même question pour la fonction caractéristique $\varphi_{X_n/n}$.

Exercice 4. *Convergence de variables exponentielles*
On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(\theta_n)$ où la suite de paramètres vérifie $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = +\infty$.

1. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité et préciser sa limite.
2. La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge-t-elle dans $\mathbb{L}^1$?
3. Étudier la convergence presque sûre de la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ lorsque $\theta_n = n$ puis $\theta_n = \ln n$.

Exercice 5. *Convergence de variables aléatoires*

1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités. Soient $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'évènements sur cet espace et $p \geq 1$ un réel. Pour chacun des modes de convergence suivants, déterminer à quelle condition sur la suite $(A_n)_{n\geq 1}$ la convergence a effectivement lieu.
   (a) La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
   (b) La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge dans $\mathbb{L}^p$ vers 0.
   (c) La suite $(\mathbb{1}_{A_n})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement vers 0.
2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que $\sum_{n\geq 1} X_n$ converge presque sûrement. Montrer que pour tout réel $c > 0$, on a $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(|X_n| > c) < +\infty$.
3. Construire une suite de variables aléatoires intégrables $(X_n)_{n\geq 1}$ et une variable aléatoire intégrable X telles qu'on ait $X_n \overset{loi}{\to} X$ et $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}[X_n] \neq \mathbb{E}[X]$.
4. Montrer que si une suite de variables aléatoires converge en loi et si chaque terme de la suite a une loi exponentielle, alors la loi limite est soit exponentielle, soit la masse de Dirac en 0.

5. Soient $\alpha > 0$ et (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et dont la loi est donnée par
$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}.$$
Montrer que la suite (X_n) converge dans $\mathbb{L}^1$ et en probabilité. Converge-t-elle presque sûrement ?

Exercice 6. *Maximum de variables uniformes*
Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0,1]$. On note $M_n := \max(U_1, \ldots, U_n)$ et $X_n := n(1 - M_n)$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X_n ?
2. Étudier la convergence en loi de la suite (X_n).

Exercice 7. *Maximum d'exponentielles*
On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(X_n)_{n\geq 0}$ de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On définit alors la suite (Z_n) par
$$Z_n := \frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k.$$

1. Montrer que la suite (Z_n) converge en probabiblité vers $1/\lambda$.
2. La convergence a-t-elle lieu presque sûrement ?

Exercice 8. *Définition alternative de l'uniforme intégrabilité*
Montrer qu'une famille $(X_i)_{i\in I}$ de variables aléatoires est uniformément intégrable si et seulement si $(X_i)_{i\in I}$ est bornée dans $\mathbb{L}^1$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si A est un événement vérifiant $\mathbb{P}(A) \leq \delta$ alors $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A] \leq \varepsilon$.

Exercice 9. *Uniforme intégrabilité via une fonction test*

1. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction décroissante telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Montrez qu'il existe une fonction continue $g : \mathbb{R}^+ \to]0, +\infty[$ telle que
$$\int_0^{+\infty} g(x) = +\infty, \quad \text{mais} \quad \int_0^{+\infty} f(x)g(x) < \infty.$$
Indice : on pourra supposer que f est régulière et considérer sa dérivée logarithmique.
2. Montrer qu'une famille de variables aléatoires $\mathcal{X}$ est uniformément intégrable si et seulement si il existe une fonction mesurable $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telle que $\lim_{x\to+\infty} \phi(x)/x = +\infty$ et
$$\sup_{X\in\mathcal{X}} \mathbb{E}[\phi(|X|)] < +\infty.$$

Exercice 10. *Autour de l'uniforme intégrabilité*

1. On considère l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue et la famille de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ définie par $X_n(\omega) := n$ si $\omega \leq \frac{1}{n}$ et 0 sinon. Montrer que $(X_n)_{n\geq 1}$ n'est pas uniformément intégrable.

2. Toujours sur l'espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$, on considère la famille de variables aléatoires

$$\mathcal{X} := \{X_\alpha,\, \alpha \in [0,1/2]\}\,, \quad \text{où} \;\; X_\alpha(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega-\alpha}}\mathbb{1}_{]\alpha,1]}(\omega).$$

Montrer que la famille $\mathcal{X}$ est uniformément intégrable mais qu'elle n'est pas dominée par une variable intégrable.

3. Soient $\mathcal{X}$ et $\mathcal{Y}$ deux familles de variables aléatoires uniformément intégrables définies sur un même espace de probabilités. Montrer que la famille $\mathcal{Z} := \{Z = X+Y,\, X \in \mathcal{X},\, Y \in \mathcal{Y}\}$ est uniformément intégrable.

Exercice 11. *Loi de Gumbel*
On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{R}$ suit une loi de Gumbel si elle admet pour densité $f_X(x) = e^{-x-e^{-x}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1. Vérifier que f_X est bien une densité et calculer la fonction de répartition F_X associée.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Démontrer que la suite $(M_n - \ln(n))$ converge en loi lorsque n tend vers l'infini vers une variable aléatoire suivant une loi de Gumbel.

Exercice 12. *Convergence en loi vers une constante*
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires qui converge en loi vers une variable aléatoire X constante égale à $a \in \mathbb{R}$. Démontrer que la suite (X_n) converge en probabilité vers X.

Exercice 13. *Maximum d'exponentielles*
Soit $(X_n)_{n\geq 2}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, suivant toutes une loi exponentielle de paramètre 1. Pour $a > 0$ et $n \geq 2$, on note

$$A_{n,a} := \left\{ \frac{X_n}{\ln(n)} \geq a \right\}, \qquad A_a := \limsup_{n\to+\infty} A_{n,a}.$$

1. Calculer $\mathbb{P}(A_{n,a})$.
2. Démontrer que $\mathbb{P}(A_a) = 0$ si $a > 1$ et que $\mathbb{P}(A_a) = 1$ si $a \leq 1$.
3. Justifier que pour tout $a > 0$ on a les inclusions

$$\left\{ \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} > a \right\} \subset A_a \subset \left\{ \limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} \geq a \right\}.$$

4. En déduire que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} = 1$ presque sûrement.
5. Montrer de même que $\limsup_{n\to+\infty} \frac{\max\{X_1,\ldots,X_n\}}{\ln(n)} = 1$ presque sûrement.

Exercice 14. *Série alternée aléatoire*
Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de loi de Rademacher, i.e. vérifiant $\mathbb{P}(X_n = 1) = \mathbb{P}(X_n = -1) = 1/2$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{\sqrt{k}}$.

1. Calculer la fonction caractéristique φ_{S_n} de S_n

2. Montrer que pour tout $t \neq 0$, lorsque n tend vers l'infini, $\varphi_{S_n}(t)$ tend vers zéro.
3. Montrer que
$$\left|\varphi_{S_{n+p}-S_n}(t) - 1\right| \leq |t| + 2\,\mathbb{P}(|S_{n+p} - S_n| \geq 1).$$
4. En déduire l'existence d'une sous-suite $(n_k)_{k\geq 1}$ telle que, pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{P}(|S_{n_{k+1}} - S_{n_k}| \geq 1) \geq 1/4.$$
5. Conclure que la suite (S_n) est presque sûrement divergente.

Exercice 15. *Lemme de Slutzky*
Soient $(X_n)_{n\geq 1}$, $(Y_n)_{n\geq 1}$ deux suites de variables aléatoires réelles et X, Y deux variables aléatoires réelles définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telles que $X_n \to X$ et $Y_n \to Y$ en loi lorsque n tend vers l'infini.

1. On suppose que les variables X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \geq 1$ et que les variables limites X et Y sont également indépendantes. Montrer alors que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.
2. Sans hypothèse d'indépendance, est-il toujours vrai que $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi ?
3. (Lemme de Slutsky) On suppose que la variable limite Y est constante p.s. Montrer que dans ce cas, $(X_n, Y_n) \to (X, Y)$ en loi.

Exercice 16. *Moyenne de Césaro*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes dont les fonctions de répartition sont données par
$$F_{X_n}(x) = 0 \text{ si } x \leq 0, \quad F_{X_n}(x) = 1 - \frac{1}{x+n} \text{ si } x > 0.$$

1. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 0.
2. Montrer qu'en revanche, la suite des moyennes de Césaro $Y_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_i$ ne converge pas vers 0 en probabilité (on pourra calculer par exemple la fonction caractéristique).