Feuille 8 : Théorèmes limite et variantes

Exercice 1. *Sortie d'une marche aléatoire*
Soient $a < b$ et (X_n) une suite de variables aléatoires réélles i.i.d. de variance finie. Montrer en utilisant la LGN et/ou le TLC que $\inf\{n > 1,\, X_1 + \ldots + X_n \notin [a, b]\}$ est fini presque sûrement.

Exercice 2. *Somme de Bernoulli indépendantes*
Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes. On suppose que chaque X_n suit une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On note $S_n := X_1 + \ldots + X_n$ et $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n p_k$.

1. Calculer l'espérance et la variance de S_n.
2. En déduire que lorsque n tend vers l'infini $S_n/n - \mu_n$ converge en probabilité vers zéro.
3. La convergence a-t-elle lieu presque sûrement ?

Exercice 3. *LGN avec dépendance*
Soient $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ une suite strictement croissante d'entiers et U une variable aléatoire de loi uniforme dans $[0, 1]$. On considére alors les variables aléatoires $X_n := \cos(2\pi\lambda_n U)$ et $S_n := X_1 + \ldots + X_n$.

1. Montrer que lorsque n tend vers l'infini S_n/n converge en probabilité vers zéro.
2. Montrer que la convergence a en fait lieu presque sûrement.

Exercice 4. *Sommes poissonniennes*

1. Pour tout $x, \lambda > 0$, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\lfloor nx\rfloor} \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \lambda \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = \lambda \\ 1 & \text{si } x > \lambda. \end{cases}$$
2. Soit f une fonction continue bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(n\lambda)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda),$$
$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k-\lambda n}{\sqrt{n}}\right) \frac{(n\lambda)^k}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-\frac{t^2}{2\lambda}} dt.$$

Exercice 5. *Théorème de Stone–Weierstrass*
Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout entier $n \geq 0$, on considère la fonction polynomiale $b_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par la formule
$$\forall x \in [0, 1], \quad b_n(x) := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

1. Montrer que la suite de fonctions $(b_n)_{n\geq 0}$ converge simplement vers f, c'est-à-dire
$$\forall x \in [0,1],\ \lim_{n\to\infty} b_n(x) = f(x).$$
2. Montrer que la convergence est uniforme, c'est-à-dire que
$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} |b_n(x) - f(x)| = 0.$$
3. Étendre le résultat ci-dessus à tout intervalle $[a,b]$.

Exercice 6. *Moyenne géométrique*
Soient $(U_n, n \geq 1)$ une suite de variables i.i.d. de loi uniforme dans $[0,1]$ et $X_n := \left(\prod_{j=1}^n U_j\right)^{1/n}$.
1. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, X_n converge presque surement et donner sa limite.
2. Montrer que $(e.X_n)^{\sqrt{n}}$ converge et déterminer la loi limite.

Exercice 7. *La formule de Stirling*
Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$. On pose $S_n := \sum_{i=0}^n X_i$ et $Z_n = (n - S_n)/\sqrt{n}$.
1. Déteminer la loi de S_n.
2. En calculant $\mathbb{P}(Z_n \in [0,1])$, retrouver la formule de Stirling $n! \approx e^{-n} n^n \sqrt{2\pi n}$.

Exercice 8. *Théorème limite central par la méthode de Stein*
On propose une preuve alternative du théorème limite central basée sur la méthode de Stein. Par rapport à la preuve vue en cours, cette approche offre l'avantage de fournir une vitesse de convergence.
1. Montrer que l'on peut trouver une constante $C > 0$ telle que pour tout fonction $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ satisfaisant
$$\|h\|_\infty \leq 1, \quad \|h'\|_\infty \leq 1 \quad \text{et} \quad \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} h(x)dx = 0,$$
l'équation $f' - xf = h(x)$ admet une solution vérifiant $\|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty \leq C$.
Indice : on pourra remarquer que $\int_{-\infty}^x h(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt = -\int_x^\infty h(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. Faire des changements de variables $t = x + u$. Enfin, pour borner f_h'', dériver l'équation satisfaite par f_h. On remarquera en effet que f_h' vérifie la même équation que f_h mais le second membre est transformé en $h' + f_h$. Il suffit alors d'utiliser les majorations déjà obtenues.
2. On considère $(X_i)_{i\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que
$$\mathbb{E}[X_1] = 0, \quad \mathbb{E}\left[X_1^2\right] = 1, \quad \mathbb{E}\left[|X_1|^3\right] < \infty.$$
On note $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que
$$\sup_{\|\phi\|_\infty + \|\phi'\|_\infty \leq 1} \left| \mathbb{E}\left[\phi\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right] - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx \right| \leq C \frac{\mathbb{E}\left[|X_1|^3 + |X_1|\right]}{\sqrt{n}}.$$
Indice : poser $h = \phi - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \phi(t)e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ et considérer f_h la solution de l'équation différentielle correspondante. Ensuite il faut écrire $\mathbb{E}\left[\frac{S_n}{\sqrt{n}} f_h\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}}\right)\right]$, développer la première somme puis effectuer des développpements de Taylor à l'ordre 2 en chaque point $\frac{\sum_{k\neq i} X_k}{\sqrt{n}}$ qui a le bon gout d'être indépendant de X_i.