

FEUILLE 9 : DES EXERCICES

Exercice 1. Somme de variables de Cauchy

Soient (X_n) des variables aléatoires indépendantes suivant la loi de Cauchy $\mathcal{C}(1)$. Déterminer la loi de $(X_1 + \dots + X_n)/n$.

Exercice 2. Polynôme aléatoire

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi uniforme dans $[0, 1]$.

1. Déterminer la loi de $Z = X^2 - Y$.
2. On considère le polynôme $P(t) = t^2 - 2Xt + Y$. Calculer la probabilité que les deux racines de P soient réelles.

Exercice 3. QCM et conditionnement

Un examen consiste en un QCM de 15 questions. Pour chaque question, 3 réponses sont possibles. Les étudiant.e.s répondent à chaque question indépendamment. L'enseignant.e estime que 70% étudiant.e.s ont préparé sérieusement l'examen et que ces dernier.e.s répondent une question correctement avec probabilité 0,8. Les autres étudiant.e.s choisissent les réponses au hasard. Il faut au moins 8 bonnes réponses pour réussir l'examen.

1. Quelle est la probabilité qu'un.e étudiant.e, choisi.e au hasard, réussisse l'examen ?
2. Si un.e étudiant.e échoue, quelle est la probabilité qu'il/elle ait préparé l'examen ?

Exercice 4. Indépendance et primalité

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité où Ω est un ensemble fini, de cardinal p un nombre premier, \mathcal{F} la tribu des parties et \mathbb{P} la loi uniforme. Montrer que événements A et B non triviaux (i.e. différents de \emptyset et Ω) ne peuvent pas être indépendants.

Exercice 5. Queue gaussienne

Soit X une variable aléatoire de loi normale centrée réduite, i.e. $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. En utilisant une intégration par parties, donner un équivalent lorsque x tend vers l'infini de $\mathbb{P}(X > x)$.

Exercice 6. Indépendance et moments

Soient X et Y deux variables aléatoires bornées. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement pour tous les entiers $k, \ell \geq 1$, on a $\mathbb{E}[X^k Y^\ell] = \mathbb{E}[X^k] \mathbb{E}[Y^\ell]$.

Exercice 7. Delta-méthode

Soient (X_n) une suite de variables aléatoires et θ un réel tels que lorsque n tend vers l'infini

$$\sqrt{n}(X_n - \theta) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Soit g une fonction de classe C^1 avec $g'(\theta) \neq 0$, montrer que lorsque n tend vers l'infini, on a alors

$$\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta)) \xrightarrow{\text{loi}} \mathcal{N}(0, g'(\theta)^2 \sigma^2).$$

Quelle est l'asymptotique de $\sqrt{n}(g(X_n) - g(\theta))$ lorsque $g'(\theta) = 0$?

Exercice 8. *Une série aléatoire*

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. i.i.d. suivant la loi normale centrée réduite. Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} X_n n^{-1} \sin(n\pi x)$ converge presque sûrement pour tout réel x .

Exercice 9. *Somme de produits*

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi et de carré intégrable. On note m leur espérance commune. Étudier la convergence presque sûre de la suite

$$S_n = \frac{X_1 X_2 + X_2 X_3 + \dots + X_{n-1} X_n}{n}.$$

Exercice 10. *Somme de produits, suite*

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, suivant une loi uniforme sur $[0, 1]$. On pose, pour tout $j \geq 1$, $Z_j = X_j X_{j+1}$.

1. Calculer $\text{Var}(Z_j)$ et $\text{Cov}(Z_j, Z_{j+i})$ pour $i \geq 1$.
2. En déduire que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2(\Omega)} \frac{1}{4}.$$

3. Les variables aléatoires $(Z_j)_{j \geq 1}$ sont-elles indépendantes? Et les variables $(Z_{2k})_{k \geq 1}$?
4. Déduire de la question précédente que

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n Z_j \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{p.s.} \frac{1}{4}.$$