

## Contents

1	Leçons d'algèbre et géométrie	2
2	Leçons d'analyse.	7
3	Développements d'algèbre	13
4	Développements mixte ou presque	15
5	Développements d'analyse	15

# 1 Leçons d'algèbre et géométrie

## 101 - Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.

- $A_5$  est l'unique groupe simple d'ordre 60.
- Isométries du cube.

## 102 - Groupes des nombres complexes de module 1. Racines de l'unité. Applications.

- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles.
- Construction à la règle et au compas.

## 103 - Conjugaison dans un groupe. Exemple de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.

- $A_5$  est l'unique groupe simple d'ordre 60.
- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles.
- Théorème de Lie-Kolchin.
- Simplicité de  $SO_3$

## 104 - Groupes finis. Exemples et applications.

- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles.
- $A_5$  est l'unique groupe simple d'ordre 60.
- Etude de  $SO_2(F_q)$ .

## 105 - Groupe des permutations d'un ensemble fini.

- $A_5$  est l'unique groupe simple d'ordre 60.
- Isométries du cube. Application à la table de caractères de  $S_4$ .

## 106 - Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie, sous-groupes de $GL(E)$ . Applications.

- Théorème de Lie-Kolchin.
- Homéomorphisme  $exp : S_n \rightarrow S_n$  et décomposition polaire.
- $SO_3$  est simple.

### **108 - Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.**

- $SO_3$  est simple.
- Isométries du cube et du tétraèdre. Application à la table de caractère de  $S_4$ .

### **120 - Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**

- Théorème de Dirichlet faible.
- Réductibilité des polynômes cyclotomiques.

### **121 - Nombres premiers.**

- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles.
- Construction à la règle et au compas.
- Réductibilité des polynômes cyclotomiques.
- Théorème de Dirichlet faible.

### **122 - Anneaux principaux.**

- Idéaux premiers de  $K[X, Y]$
- L'unique entier entre un carré et un cube.

### **123 - Corps finis.**

- Réductibilité des polynômes cyclotomiques.
- La norme dans les extensions de corps.
- Etude de  $SO_2(\mathbb{F}_q)$

### **125 - Extensions de corps. Exemples et applications.**

- La norme dans les extensions de corps.
- Construction à la règle et au compas.
- Réductibilité (ou non) des polynômes cyclotomiques sur les corps finis.

### **127 - Exemples de nombres remarquables. Exemples d'anneaux de nombres remarquables. Applications.**

- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles.
- 26 est l'unique entier entre un carré et un cube.
- Construction à la règle et au compas.

**141 - Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**

- Invariants de similitude.
- Idéaux premiers de  $\mathbb{K}[X, Y]$
- Réductibilité (ou non) des polynômes cyclotomiques sur les corps finis.

**142 - PGCD PPCM, algorithmes de calcul. Applications.**

- 26 est l'unique entier entre un carré et un cube.
- Idéaux premiers de  $\mathbb{K}[X, Y]$

**144 - Racines d'un polynôme. Fonctions symétriques élémentaires. Exemples et applications.**

- Formes de Hankel.
- Théorème de Burnside sur les groupes résolubles.
- Réductibilité (ou non) des polynômes cyclotomiques sur les corps finis.

**142 - PGCD PPCM, algorithmes de calcul. Applications.**

- 26 est l'unique entier entre un carré et un cube.
- Idéaux premiers de  $\mathbb{K}[X, Y]$

**148 - Dimension d'un espace vectoriel. Rang. Exemples et applications.**

- Invariants de similitude.
- Construction à la règle et au compas.

**149 - Déterminants. Exemples et applications.**

- La norme dans les extensions de corps.
- Par cinq points passe une conique.
- Formes de Hankel.

**150 - Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme en dimension finie. Applications.**

- Critère de Klarès
- Théorème de Lie-Kolchin

**151- Sous-espaces stables par un endomorphisme ou une famille d'endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**

- Invariants de similitude.
- Théorème de Lie-Kolchin

**152 - Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**

- Critère de Klarès
- Homéomorphisme  $\exp : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n^{++}$ , et décomposition polaire

**153- Valeurs propres, vecteurs propres. Calculs exacts ou approchés d'éléments propres. Applications.**

- Théorème de Lie-Kolchin
- Homéomorphisme  $\exp : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n^{++}$ , et décomposition polaire

**154 - Exemples de décomposition de matrices. Applications.**

- Critère de Klarès
- Invariants de similitude.
- Homéomorphisme  $\exp : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n^{++}$ , et décomposition polaire

**155 - Exponentielle de matrices. Applications.**

- Théorème de Lyapounov
- Homéomorphisme  $\exp : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n^{++}$ , et décomposition polaire

**156 - Endomorphismes trigonalisables. Endomorphismes nilpotents.**

- Critère de Klarès
- Théorème de Lie-Kolchin

**157 - Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**

- Lemme de Morse
- Homéomorphisme  $\exp : \mathfrak{S}_n \rightarrow \mathfrak{S}_n^{++}$ , et décomposition polaire
- Algorithme du gradient à pas optimal.

**158 - Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien.**

- $SO_3$  est simple.
- Homéomorphisme  $\exp : \mathfrak{so}_n \rightarrow SO_n$ , et décomposition polaire

**159 - Formes linéaires et dualité en dimension finie.**

- Formes de Hankel.
- Invariants de similitude.

**161 - Espaces vectoriels et espaces affines euclidiens : distances, isométries**

- $SO_3$  est simple.
- Isométries du cube. Application à la table de caractères de  $S_4$ .

**162 - Systèmes d'équations linéaires; opérations élémentaires, aspects algorithmiques et conséquences théoriques.**

- Algorithme du gradient à pas optimal.
- Par cinq points passe une conique.

**170 - Formes quadratiques en dimension finie. Orthogonalité. Applications.**

- Etude de  $SO_2(\mathbb{F}_q)$
- Formes de Hankel.

**171 - Formes quadratiques réelles. Coniques. Exemples et applications.**

- Formes de Hankel.
- Par cinq points passe une conique.
- Lemme de Morse
- Théorème de Lyapounov

**181-Convexité dans  $\mathbb{R}^n$**

- Théorème de Helly et Carathéodory.
- Par cinq points passe une conique.

## 190 - Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement

- $A_5$  est l'unique groupe simple d'ordre 60.
- Etude de  $SO_2(\mathbb{F}_q)$

## 191 - Techniques d'algèbre en géométrie.

- Etude de  $SO_2(\mathbb{F}_q)$
- Isométries du cube et du tétraèdre. Application à la table de caractères de  $S_4$ .
- Par cinq points passe une conique.
- $SO_3$  est simple.
- Construction à la règle et au compas.

## 2 Leçons d'analyse.

### 201 - Espaces de fonctions.

- Espace de Bergman du disque unité.
- Inversion de Fourier dans la classe de Schwartz par des méthodes d'analyse fonctionnelle.
- Théorème de Montel et théorème d'Osgood.

### 203 - Utilisation de la notion de compacité.

- Banach Alaoglu dans un Hilbert, et application à l'optimisation.
- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème de Montel et théorème d'Osgood.

### 204 - Connexité.

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème de Lie-Kolchin.
- Théorème de Sharkovski.
- Le groupe  $SO_3(\mathbb{R})$  est simple.

**205 - Espaces complets. Exemples et applications.**

- Espace de Bergman du disque unité.
- Banach Alaoglu dans un Hilbert, et application à l'optimisation.

**206 - Exemples d'utilisation de la notion de dimension finie en analyse.**

- Théorème de Liapounov.
- Lemme de Morse.

**208 - Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.**

- Espace de Bergman du disque unité.
- Banach Alaoglu dans un Hilbert, et application à l'optimisation.

**209 - Approximation d'une fonction par des fonctions régulières. Exemples d'applications.**

- Théorème de Féjer.
- Théorème taubérien fort.

**213 - Espaces de Hilbert. Exemples d'applications.**

- Espace de Bergman du disque unité.
- Banach Alaoglu dans un Hilbert, et application à l'optimisation.

**214 - Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Illustrations en analyse et en géométrie.**

- Lemme de Morse.
- Théorème de Hadamard-Lévy.

**215 - Applications différentiables sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . Exemples et applications.**

- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Lemme de Morse.
- Théorème de Liapounov.

## **218 - Formules de Taylor (impasse)**

- Théorème de Sunyer i Balaguer.
- Lemme de Morse.

## **219 - Extremums : existence, caractérisation, recherche. Exemples et applications.**

- Algorithme du gradient à pas optimal.
- Banach Alaoglu dans un Hilbert, et application à l'optimisation.

## **220 - Illustrer par des exemples la théorie des équations différentielles ordinaires.**

- Nombre de zéros d'une équation différentielle.
- Théorème de Hadamard-Lévy.
- Théorème de Liapounov.

## **221 - Equations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.**

- Nombre de zéros d'une équation différentielle.
- Théorème de Liapounov.

## **223 - Suites numériques. Convergence, valeurs d'adhérence. Exemples et applications.**

- Ordre moyen de certaines fonctions arithmétiques.
- Théorème de Sharkovski.
- Théorème de Sunyer i Balaguer.

## **Exemples de développements asymptotiques de suites et de fonctions.**

- Nombre de zéros d'une équation différentielle.
- Ordre moyen de certaines fonctions arithmétiques.

**226 - Suites vectorielles et réelles définies par une relation de récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ . Exemples. Applications à la résolution approchées d'équations.**

- Théorème de Sharkovski.
- Algorithme du gradient à pas optimal.

**228 - Continuité, dérivabilité des fonctions d'une variable réelle. Exemples et applications.**

- Théorème de Sharkovski.
- Théorème de Sunyer i Balaguer.

**229 - Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**

- Théorème de Bohr-Mollerup et application à la formule de duplication et au calcul de l'intégrale de Raabe.
- Banach Alaoglu dans un Hilbert, et application à l'optimisation.
- Algorithme du gradient à pas optimal.

**230 - Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**

- Ordre moyen de certaines fonctions arithmétiques.
- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$ .
- Théorème taubérien fort.

**234 - Fonctions et espaces de fonctions Lebesgue-intégrables.**

- Espace de Bergman du disque unité.
- Théorème de Féjer.

**235 - Problèmes d'interversion de symboles en analyse.**

- Théorème de Sunyer i Balaguer.
- Inversion de Fourier dans la classe de Schwartz par des méthodes d'analyse fonctionnelle.
- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$ .

**236 - Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables.**

- Inversion de Fourier dans la classe de Schwartz par des méthodes d'analyse fonctionnelle.
- Théorème de Bohr-Mollerup et application à la formule de duplication et au calcul de l'intégrale de Raabe.

**239 - Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**

- Inversion de Fourier dans la classe de Schwartz par des méthodes d'analyse fonctionnelle.
- Marche aléatoire sur  $[0; 1]$
- Théorème de Bohr-Mollerup et application à la formule de duplication et au calcul de l'intégrale de Raabe.

**241 - Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**

- Formule de Poisson et échantillonnage de Shannon
- Théorème de Montel et théorème d'Osgood.
- Théorème taubérien fort.

**243 - Séries entières, propriété de la somme. Exemples et applications.**

- Espace de Bergman du disque unité.
- Indécomposabilité de la loi de Poisson.
- Théorème taubérien fort.

**244 - Exemples d'études et d'applications de fonctions usuelles et spéciales.**

- Marche aléatoire sur  $[0; 1]$
- Théorème de Bohr-Mollerup et application à la formule de duplication et au calcul de l'intégrale de Raabe.

**245 - Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de  $\mathbb{C}$ . Exemples et applications.**

- Espace de Bergman du disque unité.
- Théorème de Montel et théorème d'Osgood.

**246 - Séries de Fourier. Exemples et applications.**

- Formule de Poisson et échantillonnage de Shannon
- Théorème de Féjer.

**250 - Transformation de Fourier. Exemples et applications.**

- Inversion de Fourier dans la classe de Schwartz par des méthodes d'analyse fonctionnelle.
- Formule de Poisson et échantillonnage de Shannon

**253 - Utilisation de la notion de convexité en analyse.**

- Banach Alaoglu dans un Hilbert, et application à l'optimisation.
- Théorème de Bohr-Mollerup et application à la formule de duplication et au calcul de l'intégrale de Raabe.

**261 - Loi d'une variable aléatoire : caractérisations, exemples, applications.**

- Indécomposabilité de la loi de Poisson.
- Marche aléatoire sur  $[0; 1]$

**262 - Convergence d'une suite de variables aléatoires. Théorèmes limite. Exemples et applications.**

- Marche aléatoire sur  $[0; 1]$
- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$ .

**264- Variables aléatoires discrètes. Exemples et applications.**

- Indécomposabilité de la loi de Poisson.
- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$ .

## 266 - Utilisation de la notion d'indépendance en probabilités.

- Indécomposabilité de la loi de Poisson.
- Marche aléatoire sur  $[0; 1]$
- Marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}^d$ .

## 3 Développements d'algèbre

### 3.1 Isométries du cube. Application à la table de caractères de $S_4$ .

Leçons : 101, 105, 108, 161, 191.

### 3.2 $A_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60.

Leçons : 101, 103, 104, 105, 190.

### 3.3 Théorème de Burnside sur les groupes résolubles.

Leçons : 102, 103, 104, 121, 127, 14.

### 3.4 Construction à la règle et au compas.

Leçons : 102, 121, 125, 127, 141, 144, 148, 191.

### 3.5 $SO_3$ est simple

Leçons : 103, 106, 108, 158, 161, 191, 204.

### 3.6 Lie-Kolchin

Leçons : 103, 106, 151, 153, 156, 204.

### 3.7 Etude de $SO_2(\mathbb{F}_q)$

Attention : les recasages proposés sur agreg-maths sont très mauvais.

Leçons : 104, 123, 170, 190, 191.

**3.8 Homéomorphisme  $\exp : S_n \longrightarrow S_n^{++}$ , et application à la décomposition polaire.**

Leçons : 106, 152, 154, 155 157, 158.

**3.9 Théorème de Dirichlet faible.**

Leçons : 120, 121.

**3.10 Réductibilité des polynômes cyclotomiques**

Leçons : 120, 121, 123, 125, 141, 144.

**3.11 L'unique entier entre un carré et un cube.**

Leçons : 122, 127, 142.

**3.12 Idéaux premiers de  $K[X,Y]$**

Leçons : 122, 141, 142.

**3.13 Invariants de similitude.**

Leçons : 148, 150, 151, 159.

**3.14 La norme dans les extensions de corps.**

Leçons : 123, 125, 144, 149.

**3.15 Formes de Hankel.**

Leçons : 144, 159, 170, 171.

**3.16 Par cinq points passe une conique**

Leçons : 149, 162, 170, 171, 181, 191.

### 3.17 Critère de Klarès.

Leçons : 150, 152, 154, 156.

### 3.18 Théorèmes de Helly Carathéodory.

Leçons : 181.

## 4 Développements mixte ou presque

### 4.1 Lemme de Morse

Leçons : 157, 170, 171, 214, 215, 218.

### 4.2 Algorithme du gradient à pas optimal.

Leçons : 102, 120, 121, 123, 126, 170, 190.

### 4.3 Théorème de Lyapounov.

Leçons : 155, 170, 171, 215, 220, 221.

## 5 Développements d'analyse

### 5.1 Théorème de Banach-Alaoglu et application à l'optimisation dans un Hilbert.

Leçons : 203, 205, 208, 213, 219, 223, 229, 253.

### 5.2 Espace de Bergman du disque unité.

Leçons : 201, 205, 208, 213,234, 243, 243, 245.

### 5.3 Inversion de Fourier par des méthodes d'analyse fonctionnelle dans $\mathcal{S}(\mathbb{R})$

Leçons : 201, 235, 236, 239, 250.

#### 5.4 Théorème d’Hadamard-Lévy

Leçons : 203, 204, 214, 215, 220.

#### 5.5 Théorème de Montel, et application au théorème d’Osgood.

Leçons : 201, 203, 241, 245.

#### 5.6 Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$

Leçons : 230, 235, 262, 264, 266.

#### 5.7 Théorème de Bohr-Mollerup et application à la formule de duplication et au calcul de l’intégrale de Raabe.

Leçons : 229, 236, 239, 244, 253.

#### 5.8 Marche aléatoire sur $[0; 1]$ .

Leçons : 239, 244, 261, 262, 266.

#### 5.9 Ordre moyen de certaines fonctions arithmétiques.

Leçons : 223, 224, 230.

#### 5.10 Théorème taubérien fort.

Leçons : 209, 230, 241, 243.

#### 5.11 Théorème de Sharkovski

Leçons : 204, 223, 226, 228.

#### 5.12 Indécomposabilité de la loi de Poisson.

Leçons : 243, 261, 264, 266.

### 5.13 Théorème de Sunyer i Balaguer

Leçons : 218, 223, 228, 235.

### 5.14 Nombre de zéros d'une équation différentielle.

Leçons : 220, 221, 224.

### 5.15 Théorème de Féjer.

Leçons : 209, 234, 246.

### 5.16 Formule de Poisson et échantillonnage de Shannon.

Leçons : 241, 246, 250.