PRÉPARATION À L'AGRÉGATION

Théorème de Bohr-Mollerup, et applications au calcul de certaines intégrales.

MIANNAY MATTEO
https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/matteo.miannay (lien cliquable)

1 Ce qu'on va montrer

Nous allons montrer que Γ est l'unique fonction $\mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ log-convexe et vérifiant $f(x+1) = xf(x) \forall x > 0$ à homothétie près. On en déduira que $\forall x > 0, \Gamma(\frac{x+1}{2})\Gamma(\frac{x}{2})2^{2x-1} = \sqrt{\pi}\Gamma(x)$, puis on en déduira finalement que $\displaystyle\int_x^{x=1} \ln(\Gamma) = x\ln(x) - x + \ln(\sqrt{2\pi})$.

2 Théorème de Bohr-Mollerup

Déjà, Γ est bien à valeurs strictement positives (et on cite bien le théorème précisement le jour J sans oublier la continuité), et vérifie l'égalité fonctionnelle. Pour ce qui est de la log convexité, on dérive $\ln \circ \Gamma$, on trouve ;

$$(\ln \circ \Gamma)'' = \left(\frac{\Gamma'}{\Gamma}\right)' = \frac{\Gamma'\Gamma - \Gamma'^2}{\Gamma^2}.$$

On va donc s'intéresser à $\Gamma'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)t^{x-1}e^{-t}dt = \int_0^{\infty} \left(\ln(t)t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)\left(t^{\frac{x-1}{2}}e^{-\frac{t}{2}}\right)dt$.
L'inégalité de Cauchy-Schwarz donne alors, pour tout $x > 0$:

$$\Gamma'(x)^2 \leq \int_0^{+\infty} \ln(t)^2 t^{x-1}e^{-t}dt \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}dt = \Gamma''(x)\Gamma(x)$$

, ce qui conclut, et montre que Γ vérifie bien les hypothèses.

On passe à la preuve du théorème :

Théorème 1. *Si* $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ *est log-convexe et vérifie* $\forall x > 0, f(x+1) = xf(x)$*, alors* $f = f(1)\Gamma$.

Démonstration. On remarque d'abord que $x \longmapsto \dfrac{f(x)}{\Gamma(x)}$ est 1-périodique par l'égalité fonctionnelle. Il suffit donc de prouver le résultat sur $(0,1)$. On fixe alors $x \in (0,1)$, $n \in \mathbb{N}$. On pose $g = \ln \circ f$, qui est convexe. On écrit l'inégalité des pentes entre les points : n et $n+1$, $n+x+1$ et $n+1$, $n+2$ et $n+1$, qui sont dans le bon ordre car $x \in (0,1)$:

$$\frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n} \leq \frac{g(n+x+1) - g(n+1)}{(n+x+1) - (n+1)} \leq \frac{g(n+1) - g(n)}{(n+1) - n},$$

ce qui donne :

$$ln(n) \leq \frac{1}{x}\ln\left(\frac{f(n+x+1)}{n!f(1)}\right) \leq \ln(n+2),$$

où l'on a utilisé l'égalité fonctionnelle à gauche et à droite, et l'égalité fonctionnelle pour dire que $f(n+1) = n!f(1)$. On passe le $\frac{1}{x}$ en haut, puis à l'exponentielle, et on écrit $f(n+x+1) = x(x+1)...(x+n)f(x)$, et on a :

$$n^x \leq \frac{f(x)}{f(1)} \frac{x(x+1)...(x+n)}{n!} \leq (n+1)^x,$$

donc :

$$1 \leq \frac{f(x)}{f(1)} \frac{x(x+1)...(x+n)}{n!n^x} \leq (1+\frac{1}{n})^x.$$

Les termes de gauche et de droite tendent vers 1 en n (x est fixé rappelons le). Donc :

$$\frac{f(x)}{f(1)} \frac{x(x+1)...(x+n)}{n!n^x} \longrightarrow 1,$$

d'où :

$$\frac{f(x)}{f(1)} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}.$$

En particulier, c'est vrai pour Γ, et $\Gamma(1) = 1$, donc $\Gamma(x) = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)...(x+n)}$, et donc on a bien montré que $f(x) = f(1)\Gamma(x)$ pour tout $x \in (0,1)$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$. (c'est trivialement vrai en 1..) $\square$

3 Première application : la formule de duplication de Legendre.

On pose $g : x \mapsto = \Gamma(\frac{x+1}{2})\Gamma(\frac{x}{2})2^{x-1}$. En passant au log, on voit que g est log-convexe, et l'équation fonctionnelle vérifiée par Γ montre que g la vérifie aussi, donc $g = g(1)\Gamma$, et $g(1) = \Gamma(1)\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. ($\Gamma(\frac{1}{2})$ est l'intégrale de Gauss qu'on sait calculer en passant en polaire, ce qui se trouve partout sur la toile).

On a donc bien montré $g = \sqrt{\pi}\Gamma$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Par principe du prolongement analytique, on peut prolonger cette égalité sur $\mathbb{C} - \mathbb{N}$.

4 L'intégrale de Raabe

Théorème 2 (Entre 0 et 1). $\int_0^1 \ln \circ \Gamma = \ln(\sqrt{2\pi})$.

En effet : $\int_0^1 \ln(\sqrt{\pi}\Gamma)(x)dx = \int_0^1 \ln(\Gamma(\frac{x+1}{2}))dx + \int_0^1 \ln(\Gamma(\frac{x}{2}))dx + \int_0^1 (x-1)\ln(2)dx$. *On fait* $u = \frac{x+1}{2}$ *dans la première intégrale, et* $u = \frac{x}{2}$ *dans la seconde, on obtient :*

$\ln(\sqrt{\pi}) + \int_0^1 \ln \circ \Gamma = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{2}} \ln \circ \Gamma + \frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln \circ \Gamma + -\frac{ln(2)}{2}$. *Par magie, les deux intégrales se mettent ensemble, et on obtient, en rassemblant tout le monde :* $\int_0^1 \ln \circ \Gamma = \ln(\sqrt{2\pi})$.

Théorème 3 (Entre x et $x+1$). *Soit* $x > 0$. *Alors* $\int_x^{x+1} \ln \circ \Gamma = x\ln(x) - x + ln\sqrt{2\pi}$.

Démonstration. On dérive $x \mapsto \int_x^{x+1} \ln \circ \Gamma$. On trouve : $\ln(\Gamma(x+1)) - \ln(\Gamma(x)) = \ln(\frac{\Gamma(x+1)}{\Gamma(x)}) = \ln(x)$. On connaît une primitive de $x \mapsto \ln(x)$: $x \mapsto x\ln(x) - x$. Donc : $\int_x^{x+1} \ln \circ \Gamma = x\ln(x) - x + C$ où $C \in \mathbb{R}$. On fait tendre x vers zéro, et on utilise le résultat précédent, qui conclut ! $\square$

5 Commentaires

Le théorème de Bohr-Mollerup permet de montrer instantanément plein de résultats sur Gamma sans se faire mal. Par contre, les intégrales calculées ne servent à rien, elles ne sont là que pour la beauté du jeu. Le développement se présente bien, et se recase bien, dans, selon moi : 229 Fonctions monotones Fonctions convexes 236 Exemple de méthode de calcul d'intégrale (grâce à la fin !) 239 Intégrales à paramètres 244 Fonctions usuelles fonctions spéciales si on fait une partie sur Gamma 253 Utilisation de la convexité en analyse

On remarque au passage que la formule trouvée dans l'intégrale de Raabe Duhamel à droite ressemble beaucoup à Stirling. Il faudrait voir si l'on ne peut pas passer de l'un à l'autre, et si le lien n'est pas plus profond que ça. Le développement est gérable niveau timing sans soucis, et sympa à présenter.

6 Ca se trouve où ?

Le début est fait dans le Rudin. Pour le calcul des intégrales, je n'en ai aucune idée. La formule de duplication est dans le Gourdon (attention, parfois les autours prennent x = 2x, il faut pas mélanger les deux).