Préparation à l'agrégation

Leçons 122 141 142

Idéaux premiers de $K[X,Y]$

MIANNAY Matteo
https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/matteo.miannay (lien cliquable)

1 Ce qu'on va montrer

Nous allons montrer que les idéaux principaux premiers de $K[X, Y]$ sont l'idéal nul, et les idéaux de la forme (P) où P est irréductible, et que un idéal premier non principal est maximal, et de la forme $(P(X), R(X, Y))$ où $P(X) \in I$ est irréductible, et R est irréductible dans $(K[X]/(P))[Y]$

2 Les idéaux principaux ne sont pas maximaux

K est ici un corps infini. On peut s'en sortir sans, mais dans cette partie ça simplifie grandement les choses.

Soit (P) un idéal principal. Si $P = 0$ ou P est constant, il n'y a rien à dire. On suppose sans perte de généralité que $\deg_Y(P) \geq 1$ et $P = P_n(X)Y^n + P_{n-1}(X)Y^{n-1}.... + P_0(X)$, où $P_n \neq 0$. On a choisi le corps K infini : donc il existe $x \in K$ non racine de P_n. On a alors $X - x \notin (P)$ (regarder le degré en Y), et on pose $I = (P, X - x)$.
I contient strictement (P), donc si (P) est maximal, $I = \mathbb{K}[X, Y]$ et donc il existe $A, B \in K[X, Y]$ tels que $AP + (X - x)B = 1$. Attention, ce n'est pas Bézout ! Juste le fait que $I = K[X, Y]$. En évaluant en x, on a ; $A(x, Y)P(x, Y) = 1$, donc $P(x, Y)$ de degré 0, ce qui contredit $P_n(x) \neq 0$.

Conclusion : Les idéaux principaux ne sauraient être maximaux !

3 Interlude : pseudo-division euclidienne

On se donne F, P dans $K[X, Y]$ non nuls. On veut écrire $a(X)F(X, Y) = Q(X, Y)P(X, Y) + R(X, Y)$ avec $deg_Y(R) < deg_Y(P)$. Comme d'habitude, on monte dans $k(X)[Y]$ qui est un corps, fait une division euclidienne, et on chasse les dénominateurs : $a(X)$ est alors le ppcm des dénominateurs. Et c'est bon !

4 Etude des idéaux premiers non principaux

On fixe m un tel idéal.

4.1 On montre que m contient deux polynômes $P(X)$ et $Q(Y)$ irréductibles.

On prend dans l'ensemble des polynômes de m de degré minimal en Y un polynôme $P(X, Y)$ de degré minimal en X. Nous allons montrer qu'il est irréductible.

Si $P = AB$, A et B non constants. On a pris un idéal premier, on peut donc supposer que $A \in m$. Dès lors : $deg_X(A) \leq deg_X(P)$ et $deg_Y(A) \leq deg_Y(P)$. Mais comme P est minimal en degré Y dans m, la deuxième inégalité est une égalité, ainsi que la première car P est minimal en X parmi les minimaux en Y. Donc $deg_X(B) = deg_Y(B) = 0$, et B est constant, contradiction.

m n'est pas principal, donc $m \neq (P)$, donc il existe $F \in m - (P)$. On écrit la pseudo-division euclidienne vue précédemment, et alors $R(X,Y) = a(X)F(X,Y) - P(X,Y)Q(X,Y) \in m$ mais $\deg_Y(R) < deg_Y(P)$ donc $R = 0$ et P divise $a(X)F(X,Y)$ dans $k[X,Y]$ factoriel.
P est irréductible, ne divise pas F car $F \in m - (P)$, donc P divise $a(X)$ donc $P = P(X)$. On a donc trouvé notre $P(X)$ irréductible dans m. De manière symétrique, on trouve notre $Q(Y)$

4.2 On en déduit que m est maximal.

On note $\overline{m}$ et $\overline{Q}$ les images par la surjection canonique $k[X][Y] \longrightarrow (K[X]/(P))[Y]$. $\overline{m}$ est bien un idéal car le morphisme est surjectif !

Il est clair que[1] : $K[X,Y]/m \simeq (K[X]/(P))[Y]/\overline{m}$, et ces quotients sont intègres car m est premier. Donc $\overline{m}$ est un idéal premier de $(K[X]/(P))[Y]$ (car le quotient est intègre). Mais $K([X]/(P))[Y]$ est principal car $K[X]/(P)$ est un corps car P est irréductible et $\overline{m}$ est non nul (car $\overline{Q} \in \overline{m}$ et $\overline{Q} \neq 0$) Donc, car dans un anneau principal les idéaux premiers non nuls sont maximaux, $\overline{m}$ est maximal dans $(K[X]/(P))[Y]$ et donc $(K[X]/(P))[Y]$ est un corps, donc $k[X,Y]/m$ est un corps, et m est maximal.

4.3 On conclut

Les principaux premiers sont de la forme (P) où P est irréductible. Passons aux premiers non principaux. Ils sont alors maximaux d'après ce qui précède. On a alors $P(X) \in m$ irréductible, et $R(X,Y) \in m$ tel que $\overline{R(X,Y)}$soit irréductible dans $(K[X]/(P))[Y]$ (on prend un générateur de $\bar{m}$, on peut car $K[X]/P$ est un corps donc K[X]/P[Y] est principal). Alors $m = (P(X), R(X,Y))$. Pourquoi ? Soit $Q \in M$. On le regarde dans le quotient $K[X]/(P)$. Il s'écrit $\overline{Q'}\overline{R(X,Y)}$. On tire alors $\overline{Q'}$ en arrière, et $Q = Q'R(X,Y) + A(X,Y)P(X)$.

A partir de maintenant, c'est du bonus pour les questions.

5 Bonus

5.1 Cas K algébriquement clos

On conserve les notations précédentes, on considère P et Q les deux irréductibles obtenus dans $K[X]$ et $K[Y]$ Alors $P = X - a$ et $Q = Y - b$. avec $I = (P,Q)$, $K[X,Y]/I \simeq (K[x]/P))[Y]/Q \simeq k$ Donc I est maximal, et $I \subset m : I = m$. On retrouve le nullstellensatz, "le théorème de zéros de Hilbert" pour les moins germaniques d'entre vous, c'est à dire que les idéaux maximaux de K[X,Y] sont les zéros de morphismes d'évaluation.

1. Pas tant que ça. Mais on ne devrait pas trop vous embêter avec ça. Pour s'en convaincre : écrire les quotients un par un, avec le "diagramme", et voir qu'on peut remonter. Sinon, c'est juste un théorème d'isomorphime. Bref, faut pas trop s'inquiéter de ce point.

6 Cas $K = \mathbb{R}$

Si P et Q de degré 1, c'est bon, comme juste avant.

Si P est de degré 2 : Dans le Francinou Gianella, cette question arrive avant le cas général, mais autant appliquer le théorème. Les idéaux non principaux premiers sont donc de la forme $(P(X), R(X,Y))$ où P est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ et $R(X,Y)$ l'est dans $(\mathbb{R}[X]/(P))[Y] \simeq \mathbb{C}[Y]$.

Donc $R(X,Y)$ irréductible dans $\mathbb{C}[Y]$, donc $\overline{R} = Y + \overline{aX+b}$ où $\overline{aX+b} \in \mathbb{R}[X]/(P)$. Donc $R(X,Y) = T(X)P(X) + Y + aX + b$ et $I = (P(X), Y + aX + b)$.

7 On récupère au passage que $K[X,Y]/m$ est un espace vectoriel de dimension finie

Si $\overline{R}(X,Y)$ génère $\overline{m}$, la dimension de $(K[X]/(P))[Y]/\overline{m}$ comme $K[X]/(P)$ espace vectoriel est $deg_Y(R)$, la dimension de $K[X]/(P)$ comme K espace vectoriel est $deg(P)$, ce qui permet de déduire que $K[X]/(P))[Y]/\overline{m}$ est un K espace vectoriel de dimension finie (base téléscopique).

8 Le cas des corps finis

Soit P tel que $(P(X,Y))$ soit maximal.

On ne peut plus utiliser le fait que le corps est infini et que notre polynôme a un point qui n'est pas une racine. On s'en sort autrement : à la place, on utilise le fait que $F_q[X]$ a une infinité de polynômes irréductibles (preuve : soit les facteurs irréductibles du $p^r - 1$ ième polynôme irréductible qui sont de degré r, soit le développement sur le dénombrement des polynômes cyclotomiques..)

DOnc on reprend au moment où on prenait x non racine de P_n. A la place, on prend un irréductible $\pi(X)$ ne divisant pas P_n. Donc $\overline{\pi(X)}$ est inversible dans le corps $F_q[X,Y]/(P(X,Y))$. DOnc on peut tirer en arrière et on a alors une relation de Bézout : il existe $Q(X,Y)$ et $T(X,Y)$ tels que $Q\pi + TP = 1$. On plonge cette relation dans $F_q[X]/\pi(X)[Y]$ où l'on a $\overline{P(X,Y)T(X,Y)} = 1$. Donc $\overline{P(X,Y)}$ est de degré 0 en Y, ce qui est absurde car $\overline{P(X,Y)} = (P_n mod \pi)Y^n + ... + P_0 mod \pi$ et π ne divise pas P_n : contradiction.

9 Et si on veut en savoir plus : le bonus du bonus !

L'étude des idéaux premiers de K[X,Y] est fondamentale en géométrie algébrique, dans le cadre de l'étude de courbes algébriques planes. En fait, on fait de la géométrie algébrique ! Dans ce domaine, voilà ce que Jérémy Le Borgne propose, mais qu'il ne faut pas dire à l'oral sauf si vous êtes très, très savant : 3) géométriquement, si on regarde le lieu des zéros communs à tous les éléments de l'idéal, on trouve K^2 pour l'idéal 0, une sous-variété de dimension 1 pour un idéal premier principal, et une sous-variété de dimension 0 (un nombre fini de points) - on peut voir cela comme conséquences de la théorie plus générale de la dimension, avec le fait que $K[X,Y]$ est de dimension de Krull égale à 2, mais ça dépasse vraiment le cadre du programme. Enfin, on peut ajouter que le cas de 3 variables, et a fortiori le cas général à n indéterminées, sont encore plus difficiles à obtenir que celui-ci (contrairement au théorème des zéros de Hilbert, qui est le même dans tous les $K[X_1, ...X_n]$.

10 Et les recasages ?

Anneaux principaux (claro que si), Polynômes irréductibles à une indéterminée, Corps de rupture (on utilise grandement la structure de K[X] et des polynômes irréductibles (P et Q du début), et PGCD PPCM (la pseudo division euclidienne, on tire des pseudos relations de Bézout, on fait des idaux...)

11 Oucéfé ?

Dans le exercice de mathématiques pour l'agrégation de Francinou Gianella, le bleu (pas les cassini). Pas mal de choses ne sont pas détaillées, donc il faut faire attention. Mais une fois qu'on a compris ce qu'il se passe, le livre suffit largement.