Retour écrits

Algèbre : Première épreuve ! Le sujet était particulier. Déjà, pas d'exercices préliminaires, lesquels servent d'habitude à éviter le grapillage et à s'échauffer. Faut-il donc aller grappiller les questions classiques de la fin? J'ai choisi de ne pas le faire; à raison je ne sais pas! Le début était vraiment très simple et très guidé, plus que d'habitude j'ai trouvé, mais après c'était le grand saut et c'est vite devenu dur, autour de la Q9. J'ai perdu du temps bêtement (je n'arrivais pas à résoudre une question car persuadé qu'une rotation d'angle pi/6 était d'ordre 6, j'ai donc voulu adapter ce qu'on avait fait avec une rotation d'angle pi/12 (qui serait donc d'ordre 12 selon moi!), sans succès, et ce pendant 30 minutes… Enfin, question 9c sur l'injectivité, ça avait l'air pas trop dur mais en fait c'était très compliqué, et j'y ai perdu beaucoup de temps. J'avais un ressenti très moyen, je pensais avoir 13-14, j'ai effectivement eu 14.25, c'est pas cher payé, je prends!

Analyse :

J'ai adoré le sujet, j'ai écrit en continu, 55 pages, j'ai eu l'impression de rédiger niquel en détaillant tout, je suis allé plutôt loin (16.e en sautant pas grand chose) je pensais vraiment avoir une très grosse note, et bien non… J'ai eu 15.75. En fait, je crois qu'aux écrits c'est plutôt pas mal et que les notes ne vont vraiment pas très haut, donc je prends.

Retour analyse

Tirage : 203 : Utilisation de la notion de compacité
2… : Fourier (je sais plus si c'était série ou transformée, je n'ai même pas lu en voyant la première)

J'étais déjà passé sur cette leçon. j'avais fait un plan très fouillé, j'en ai été content, mais je m'étais fait allumer car j'écrivais mal et c'était mal équilibré. Dans cette version, j'ai enlevé toute la partie "résultats de base sur la compacité", pour les faire apparaître au fur et à mesure des applications. J'ai aussi allégé ma partie théorie spectrale et opérateurs compacts de la fin. Malheureusement aux oraux blancs on m'en avait assez peu parlé, alors que là… Vous verrez à la fin! Je m'en sors quand même avec 70 items (88 aux oraux blancs je crois)

Plan : I Premiers résultats
A Déf de la compacité (en deux items, topologique & métrique, j'ai pas mis de résultats de cours sur la compacité)
B Premières applications en analyse réelle et topologie
image d'un compact, bicontinuité automatique (avec application à la décomposition OS), fonction continue sur un K bornée et atteint ses bornes (applications à rolle, accroissements finis), équivalence des normes, Heine, application à Fourier, clin d'oeil aux fonctions évanescentes
C Th de Riesz
Le théorème, avec en application "opérateurs compacts" (cf la suite)

II Fonctions continues sur un compact
C'est un Banach, résultats bateaux, Stone Weierstrass, des applications, puis Ascoli, avec en application la compacité de certains opérateurs, Cauchy Peano, puis mon dév : Montel-Osgood (Montel sur les familles normales de H(U), Osgood qui dit que si f est limite simple de fonctions holo avec f est holo sur un ouvert dense)
III Equa diff
Cauchy Lipschitz, Peano, sortie de tout compact, puis Hadamard Lévy (je ne l'ai pas mis en dév, mais j'aurai pu)
IV Convergence faible dans le cadre Hilbertien
Définition, propriétés usuelles, suite cv faiblement est bornée etc, puis mon deuxième dév : Banach Alaoglu avec application à la minimisation d'une fonctionnelle convexe continue coercive sur H hilbert
V Théorie spectrale et Opérateurs compacts
les déf, le fait que le spectre est compact, déf des opérateurs compacts, des exemples, l'alternative de Fredholm & le th de Riesz (dim ker T - I < infini, Im(T) fermé etc), et on finit en beauté avec la réduction des opérateurs compacts auto-adjoints.

Mon ressenti : j'étais heureux
Défense du plan : J'ai mis en avant le fait que la compacité était un cadre confortable pour des raisons d'existence, d'optimisation etc, et qu'on allait essayer de mettre ça en valeur. Avant les parties sur la CV faible et la théorie spectrale, j'ai dit que dans les cadres plus "sauvages" tels que les hilbert de dim infinie, on essaie de se ramener à ce cadre, d'où la CV faible et les opérateurs compacts. Après avoir présenté l'item "Limite d'opérateur de rang

fini => compact”, j’ai raconté cette anecdote : “Mazur, en 1932, pose dans le Cahier écossais la question de la réciproque : tout opérateur compact est-il limite d’opérateurs de rang fini, en promettant une oie vivante à quiconque résolverait le problème, et ce n’est que 40 ans après que Enflo répond à cette question par la négative, gagnant ainsi l’oie vivante promise”. Ca a fait rire le jury….
Dév choisi : Montel & Osgood

Je l’ai pas trop mal fait, à la fin il me restait du temps, j’ai dit qu’on avait montré au passage que H(U) muni de la convergence uniforme sur tout compact est un espace de Montel, c’est à dire que ses compacts sont les fermés bornés, et donc qu’il ne saurait être normable d’après le th de Riesz.

J’avais deux trois quantificateurs faux sur mon dev, ils les ont repris avec moi, puis ils m’ont demandé des précisions.
Ensuite, questions sur le plan. je ne sais pas si je me souviens de tout, mais :

Applications de la bicontinuité auto sur un compact (j’ai dit décomposition polaire, et que ça servait bcp dans les groupes topologiques)
Exemple de fonction non uniformément continue :$x \mapsto \sin(x^2)$, on prend $x_n = \sqrt{2n\pi}$ et $y_n = \sqrt{2n \pi + \pi/2}$, alors on a $x_n - y_n \to 0$ et $f(x_n) - f(y_n) = 1$ ne tend pas vers zéro (et c’est une caractérisation de l’uniforme continuité que si $x_n - y_n$ tend vers 0 $f(x_n) - f(y_n)$ tend vers zéro). Les 7 heures de colles hebdomadaires c’était pas contre-productif je vous dis!

Preuve que la boule unité d’un hilbert de dim infinie n’est pas compacte sans Riesz :
J’ai dit “je sais qu’il faut prendre par exemple dans L^2 les $e^{i2\pi zn}$, c’est de norme 1 et c’est pas de Cauchy. Jai mis L2(R) au lieu de L2([0;1]) bêtement, ils m’ont repris du coup j’avais l’impression d’avoir dit n’importe quoi, mais en fait c’était ça ! Ils m’ont demandé comment on faisait en général, j’ai dit “si il est séparable alors il a une base hilbertienne et on fait la même chose” ça les a convaincu je crois. Je suis content d’avoir dit le mot séparable aujourd’hui. Ils m’ont demandé ce que voulait dire séparable.
J’ai mis que un polynome qui CVU sur R converge vers un polynome, ils m’ont demandé la preuve. Pas de soucis, si il y a bien un truc que je connais par coeur c’est ça…
Ils disent que j’ai parlé de convergence faible dans les Hilbert, ils me demandent si ça se généralise… Je dis que oui, dans les Banach on a la notion de topologie faible. Ils me demandent alors si on a un résultat de compacité faible, j’ai dit “oui, ssi il est réflexif il me semble”, j’étais pas sûr, il a rien dit, j’ai vérifié, c’est ça (c’est Kakutani), et bien je crois que c’est la classe les amis..
On passe aux exercices. On s’intéresse à ;

$$\varphi : [0;1] \longrightarrow [0;1] \text{ continue, } E = \left\{y \in C^1[0;1], y' = y \circ \varphi\right\}$$

Montrer que E est de dimension finie.
J’ai déroulé : déjà on vérifie que c’est un EV (j’ai pas précisé qu’il y avait zéro dedans et que c’était inclus dans les fonctions C^1, ça m’a donc été demandé), puis on a envie d’appliquer Ascoli, je dis qu’on peut choisir une norme, je propose de tirer parti de la dérivabilité en prenant une norme type norme infini de f + norme infini de f’, on me dit qu’il n’y a pas besoin

et que la norme infinie suffit. Et effectivement, elle suffit, je déroule Ascoli, et conclut bien que la boule unité est compacte.
S’ensuit un autre exercice avec Ascoli, que j’ai oublié mais niquel.
Puis ils me demandent un exemple d’opérateur compact, je propose de prendre :

$$K \in C^0([0;1] \times [0;1], [0;1], \text{ et } \begin{array}{cccc} T_K & : & C^0[0;1] & \to & C^0([0;1]) \\ & & f & \mapsto & \left(x \mapsto \int_0^1 K(x,y)f(y)dy\right) \end{array}$$

C’est un opérateur compact par Ascoli. Il acquiesce, et propose de prendre :

$$\begin{array}{cccc} T & : & C^0[0;1] & \to & C^0([0;1]) \\ & & f & \mapsto & \left(x \mapsto \int_0^x f(y)dy\right) \end{array}$$

.

Il me demande le lien avec mon affaire, je dis que c’est pareil avec K = indicatrice(y <= x), juste que K est pas continue. Il me demande de montrer que c’est compact, je le fais avec Ascoli. Puis si on remplace l’espace de départ par L^2(0;1)? Je vérifie d’abord la continuité (OK avec CYS) puis fait Ascoli (OK avec CYS).
Et puis c’est l’heure, ils me souhaitent bon courage pour la convocation à 6h30 demain, et je suis CONTENT! Jury très gentil, et agréable.

Remarque : tout du long ils ont été très pointilleux sur les quantificateurs, la rédaction, on m’a beaucoup demandé de détailler, jusqu’au bout de l’oral. Un regret donc : de ne pas avoir été clean direct du premier coup à chaque fois, ça aurait permis de gagner du temps finalement.

Pour le développement, j’ai pris la version de seigneur Théo Untrau qui était bien imprimée au fond de mon cerveau ,et je l’en remercie. J’ai lu la version du Bernis & Bernis pour vérifier, mais c’était fait différemment, ça m’a plus embrouillé qu’autre chose. Conclusion : vive Théo!

Note finale : 17. C’est top, mais si j’avais fait un effort et été un peu plus clean direct, j’aurai pu taper plus haut peut être! En tout cas, j’ai beaucoup pris de plaisir à cet oral

Tirage : 101 : Groupe opérant sur un ensemble
158 : Endomorphismes remarquables d'un espace euclidien

Choix : 101

Deux tableau, un à craie, un à veleda. Niquel niveau place pour écrire.

Plan :

I Action de groupe : une notion à deux faces
A Généralités (le lien avec le morphisme dans S_X, les déf d'orbites etc, formules des classes
B Action par translation
C Par conjugaison

II Applications en théorie des groupes
A p-groupes (tout ce qu'il y a à savoir à peu près)
B Théorèmes de Sylow (Dév: A5 unique groupe simple d'ordre 60)

III En algèbre linéaire

IV En géométrie
I Action de GL(E), isomorphismes exceptionnels
II Groupes d'isométries (D_n, solides platoniciens, sous groupes finis de O2 SO2 SO3), développement : Isométries du cube, applications à la table de caractères

V Représentations linéaires des groupes finis
Les bases, et ce qu'il faut pour le dev 3 : Les groupes de cardinal p^alpha q ^beta sont résolubles. (Th de Burnside)

J'étais content au tirage. Je connaissais bien mon plan. J'ai hésité un peu sur la partie sur les représentations, je n'avais pas prévu de mettre Burnside en dev mais je l'aime beaucoup et il se présente bien alors en route.
Dans ma présentation, j'ai insisté sur le fait que les groupes sont "faits" pour agir (S_n sur 1;n, GL_n sur les droites, D_n sur le polygone régulier…). J'ai aussi insisté sur la recherche de formes "normales" et d'invariants, en soulignant leur apparition tout au cours de la présentation du plan.
J'ai oublié de parler du fait qu'un espace affine c'est la donnée d'une action simplement transitive sur un EV, donc je l'ai dit en introduction de la partie géométrie. Idem pour le principe de conjugaison dans S_n & en géométrie, j'en ai parlé en introduisant l'action par conjugaison.
Ils ont choisi mon développement sur les isométries du cube. J'ai fait deux erreurs, que j'ai rattrapé : la première j'ai montré sur mon dessinque ma rotation d'angle pi envoyait certains trucs sur certains trucs mais j'ai dit quelque chose de faux pour deux d'entre eux en allant trop vite. La deuxième, j'ai dit que 2 parmI 4 faisait 3 en dénombrant mes classes de

conjugaison pour S_4, j’ai vu que ça collait pas, donc j’ai repris ça. J’ai également fait la la lecture de la table de caractère (ici on trouve A_4, et V_4 est ici car le caractère est égal au degré de la représentation…)

J’espérais qu’ils prennent un des deux autres développements mais bon ça n’a pas été le cas!

Question 1 : Il y a-t-il unicité de la décomposition en somme de représentations ? Puis : quelle est la dimension de *je suis pas sûr il a rephrasé trois fois c’est pas très clair* mais ça ressemblait aux morphismes de représentation dit de manière compliquée.
Pour l’unicité, j’ai dit oui à iso près la multiplicité étant donnée par chi scalaire chi_V.
J’ai beaucoup ramé sur la suite, je m’attendais pas à ce que ça parte aussi fort. On s’est ramenés au cas V = V_1^alpha_1, on a priis le noyau, j’ai dit qu’on avait un supp stable par Maschke, et après plus rien.. On est passés à autre chose. Ce n’était pas agréable. Ca m’a beaucoup embrouillé, il parlait d’action et de représentation en même temps, il m’a d’ailleurs parlé d’une action sur R^2 où là la dimension était 4 bref il m’a perdu c’était très désagréable et j’ai très peur qu’il ait conclu que j’étais une banane en représentations et qu’il me mette 12 comme punition!

Question 1.5 : Comment on réalise phi (la dernière représentation, celle de degré 2) sans l’orthogonalité des colonnes?

C’est l’action des isométries positives du cube sur les trois axes de symétrie qui la donne. Il m’a demandé si je voyais pas autre chose, j’ai dit que ça pouvait venir d’une représentation de A4 mais que je saurai pas mieux lui donner de sens dans A4. On est passés à autre chose

Question 2, la baisse de niveau : Vous dites que l’action de Gl_n(K) sur M_n(K) est essentielle et que c’est la réduction, pourquoi?
Je dis que c’est la recherche de bonne base pour un endo. Elle me demande de détailler, je dis que en fixant une base, on a une matrice associée à un endo, et que PMP^-1 c’est la formule de changement de base, elle me demande de l’écrire……. Je dis donc que Mat_B(u) = les u(e_i) en colonnes dans la base B, P_B,B’ c’est les f_i en colonnes dans la base B, et que la formule de changement de base est donnée par P MatB P-1, ça a l’air de finir de la convaincre, ouf.

Question 3 : J’ai dit que si p divise le cardinal du groupe on a un groupe de cardinal p^i, est-ce que j’ai un contre exemple quand p n’est pas premier?

Je dis “souvent H8 fournit des contre exemples” avant de dire “oups c’est un p-groupe ça va pas marcher”. Je cherche dans S_4, il me dit regarder dans les groupes simples, je dis “A_5 est de cardinal 60 si j’avais un groupe de cardinal 30 il serait d’indice 2 donc distingué mais A_5 est simple”. Ils sont convaincus.

4 : J’ai parlé du fait que tout groupe G s’injecte dans GL_n(C). Pourquoi C? Pourquoi c’est important ?

Je dis C parce que comme ça on a la réduction, mais qu'on pourrait prendre n'importe quel corps. En particulier F_q pour les th de Sylow.

5 Vous avez une idée de pourquoi R c'est une bonne idée ?

Je dis qu'on a le th spectral, et que on doit avoir des matrices de permutations symétriques avant de dire que c'est évidemment faux. Une minute après, je dis "les matrices de permutations sont orthogonales, donc on a la réduction des normaux"

6 Un mot sur l'action de $O_n(R)$ justement?

Et bien c'est les matrices de changement de base entre deux bases orthonormées; d'où l'importance de l'affaire.

7 Un exemple de groupe qui ne peut pas s'injecter dans $GL_n(C)$? Et comment ça s'appelle?

Je dis qu'il faut que ça soit infini, mais j'arrive pas à en trouver. Je connais encore moins le nom. (Update 14h05 : je suis une banane, le th de burnside dit que les groupes d'exposants finis de GLn (C) sont finis, et ça répondait à la question. C'est bête, je le sais, on m'avait posé l'exo au tipe à l'époque, j'avais échoué lamentablement, mon prof m'avait alors indiqué qu'il était dans notre TD (en détaillé..), je l'ai revu cette année, jje sais le montrer parfaitement, je l'ai mis en oral blanc en MP* deux semaines avant les oraux et j'en parlais avec Lucas la semaine passée!!!)

8 Les transpo engendrent S_n, vous pouvez donner des relations qu'elles ont?
Au carré ça fait 1, le produit quand à support disjoints fait 1 au carré, et le cube du produit fait 1 quand c'est pas à support disjoint

9. On se donne engendré par s1 s2 tel que $s^1{}^2 = 1$, $s2^2 = 1$, $(s_1s_2)^3 = 1$. Montrer que c'est S^3.

J'ai montré que c'était surjectif dans un premier temps. Pour l'injectivité, il faut faire le cardinal. J'ai pas été assez rigoureux, donc ils ont été pointilleux et j'y ai laissé beaucoup de temps. Quand j'ai dit que $s_1s_2s_1 = s_2s_1s_2$ faisait que un mot de taille minimale était forcément de taille inférieure à 3, ils m'ont demandé de l'écrire proprement. On a passé pas mal de temps là dessus, alors que j'aurai pu l'expédier.

Bilan : Je ne sais trop quoi penser !

Note finale : 13. Je pense que j'ai payé mon non succès à la question sur les représentations, qui donnait sûrement l'impression que je ne savais pas de quoi je parlais, et mes imprécisions sur la fin où j'aurai dû tout écrire clean direct. J'aurai du faire un plan plus tranquille, ça aurait été plus malin.

Retour Option A

Mots clés : Bernoulli, Chaine de Markov

Objet du texte : Problème du camionneur : on a n objets, de poids w_1,...,w_n, une capacité maximale W. La question : de combien de manières on peut remplir notre camion?
On note C(n,W) les différentes parties de 1;.....;n possibles, et c son cardinal. Le calcul de C(n,W) de manière exacte est impossible en temps polynomial. On veut donc le faire de manière probabiliste.
Notre but : trouver une variable aléatoire C^tilde(n,W) telle que :

$$\forall \varepsilon > 0, 0 < \delta < 1,\ P((1+\varepsilon)^{-1} \leq \frac{\tilde{C}(n,W)}{C(n,W)} \leq 1+\epsilon) \geq 1-\delta$$

Pour cela, on montre que si l'on peut approximer la mesure uniforme sur C(n,W) correctement (en variations bornées), on s'en sort. On utilise pour cela des techniques de comptages. Le terme variation bornées n'était pas spécifié, je l'ai utilisé.
Le texte utilise des techniques de comptage pour le faire dans une premiere partie.
L'idée est la suivante:

Soit $C_1 \subset C$, dont on connait le cardinal. Si on sait simuler $Z_1, ..., Z_k$ uniforme sur C, alors si $p_1 = \frac{|C_1|}{|C|}$, la convergence presque sure suivante : $\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} 1_{Z_k \in C_1} \longrightarrow p_1$ permet d'estimer C_1.

Donc on se ramène à cela avec des techniques de comptages.

Dans une seconde partie, on définit une chaine de Markov sur C(n,W) ainsi.

Avec probabilité 1/2 , on evoie A sur A
Sinon, on tire un nombre au hasard entre 1 et n. Si il est dans A, on renvoie A sur A - l'entier en question.
Si il n'y est pas, et que l'union de A et de l'entier est bien dans C(n,W), on le rajoute, sinon on renvoie A.

On définit ainsi une chaine de Markov apériodique irréductible finie symétrique. Elle converge donc, et c'est vers la mesure invariante.

Dans une partie que je n'ai pas trop traitée, on étudie le temps avant d'avoir une bonne approximation (la norme en variation bornée de u_k - u est décroissante, on se demande à partir de quand elle est inférieure à delta fixée)

J'ai trouvé le texte dur à modéliser informatiquement. J'ai fait un programme qui simule notre chaine de Markov, avec succès, mais cette dernière a des parties comme états, donc à représenter… J'ai donc tracé les cardinaux en fonction du temps, avec différentes valeurs de départ et de poids. Je ne sais pas si c'est suffisant pour prétendre aux points d'info, mais je ne voyais pas quoi faire d'autre. On ne m'a pas demandé de détails là dessus.

Je n'ai pas présenté tout le texte, j'ai remodelé les parties pour avoir quelque chose de plus sympa à mon goût.

Les questions : j'avais un CV presque sure, j'ai dit dans ma présentation que ça donnait un estimateur fortement consistant, qu'on pouvait en déterminer une vitesse, et qu'on connaissait son risque quadratique car on avait calculé sa variance.

Ils m'ont demandé la vitesse : j'ai dit sqrt(n) avec le TCL. Ils m'ont dit : vous avez la variance pas le risque quadratique, j'ai dit oui mais c'est sans biais, donc c'est pareil, ils étaient contents. Ensuite ils m'ont demandé comment j'en déduis un intervalle de confiance, j'ai dit que j'estime la variance avec l'estimateur qui va bien, ils m'ont demandé : pourquoi 1/n-1 ? J'ai dit pour que ce soit pas biaisé, ils ont dit OK, puis Slutsky, et hop, ils sont contents. Ouf, j'ai survécu aux questions de stat.
Hypothèses pour existence et unicité de la amesure invariante : je les donne. Ils me demandent ce qui sert à quoi, j'ai nagé un peu et me suis trompé, mais à la fin j'ai trouvé. C'est mon seul regret! Je cherchais à utiliser l'apériodicité mais ça sert que pour la CV.
Ils m'ont demandé comment estimer la mesure invariante, je leur ai dit qu'on prenait le théorème ergodique; ils étaient contents. Ils m'ont demandé si je connaissais la vitesse de convergence, j'ai dit 1/sqrt(n) en analogie avec le TCL, ils étaient contents. Ils m'ont demandé comment calculer les temps moyens de retour en un point, j'ai dit on prend f = l'indicatrice dans le th ergodique, et c'est bon. Ils m'ont demandé si j'avais une idée de lla vitesse de convergence des chaines de markov, j'ai dit non mais que c'était surement assez lent. Ils m'ont parlé d'excursions en restant sur le même thème, je n'ai pas su suivre.

Ils m'ont fait montrer que CV en loi implique CV en variations totales. Je l'ai montré directement dans le cas fini, ils m'ont fait avancer sur le cas infini, m'ont interrompu avant qu'on puisse conclure, ils étaient convaincus.

Ils m'ont demandé de justifier que la chaine de Markov du dessus était une chaine de Markov. J'ai éceit X_n+1 = f(X_n,U_1), mais X_n c'est déjà pris, donc fallait mettre un k, et c'est pas U_1 mais U_k,1 et U_k,2 où U_k_1 est une suite de Bernoulli et U_k_2 une suite de lois uniformes bref des petits trucs à reprendre, mais j'y étais

Enfin, ils m'ont demandé l'intérêt de symétrique. J'ai dit que du coup c'était DZ avec le th spectral, ils m'ont dit oui et le lien avec la CV? Et bien c'était juste le fait que (1 1 1 1 1 1 1) est VP, et ça nous donne la mesure invariante qui est la loi uniforme, d'où la convergence vers la loi uniforme.

J'ai eu quelques autres questions assez simples, auxquelles j'ai plutôt bien répondu. Je regrette amérement mon erreur sur les hypothèses du th de convergence (j'ai su les donner, mais pas lesquelles servaient à quoi, ça s'est emmêlé!)

J'ai aussi eu du mal à relier mes théorèmes à la problématique, c'était pas faute d'en avoir envie!

Je ne saurais pas du tout estimer ma note, nous verrons!
Note finale : 14.5. C'est très cohérent je pense, je prends avec grand plaisir.