TD1 : Tribus, applications mesurables, mesures

Cette collection d'exercices est directement issue des planches de TD rédigées par Basile de Loynes pour son cours d'intégration.

Exercice 1 *Limite inférieure et limite supérieure de suite numérique*

On notera $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, et soit $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$, $a < b$.

1. Rappeler la défintion de $\liminf x_n$ et $\limsup x_n$.
2. Selon que a et b soient finis ou pas, donner des exemples de suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $\liminf x_n = a$ et $\limsup x_n = b$.
3. Démontrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ si et seulement si $\liminf x_n = \limsup x_n = \ell$.

Exercice 2 *Opérations ensemblistes*

Soit E un ensemble, on note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Soient $A \in \mathcal{P}(E)$ et $(B_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(E)$.

1. Montrer que
$$A \cap \left(\bigcup_{i\in I} B_i\right) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i), \quad A \cup \left(\bigcap_{i\in I} B_i\right) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i).$$
2. Montrer que
$$\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcap_{i\in I} A_i^{\complement}, \quad \left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^{\complement} = \bigcup_{i\in I} A_i^{\complement}.$$
3. Soient F un ensemble, $f : E \to F$ une application. Montrer que
$$f\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f(A_i), \quad f\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i).$$
   Montrer que l'inclusion est stricte en générale. Montrer que si f est injective, la deuxième inclusion est une égalité. Montrer que $f(A)^{\complement}$ et $f(A^{\complement})$ ne sont en général pas comparables.
4. Soient $C \in \mathcal{P}(F)$ et $(C_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $\mathcal{P}(F)$. Montrer que
$$f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} C_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(C_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} C_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(C_i), \quad f^{-1}(C^{\complement}) = f^{-1}(C)^{\complement}.$$

Exercice 3 *Réunion et intersection dénombrables*

1. Déterminer les ensembles suivants :
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} \left[0, \frac{1}{n}\right[, \quad \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} \left[\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right[, \quad \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[k - \frac{1}{n+1}, k + \frac{1}{n}\right[.$$

2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ et f des applications d'un ensemble E dans $\mathbb{R}$. Interpréter l'ensemble suivant :

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{i\geq k}\left\{x\in E, |f_i(x)-f(x)|\leq \frac{1}{n}\right\}.$$

Exercice 4 *Points de discontinuité d'une fonction croissante*

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction croissante.

1. Montrer que f admet des limites à gauche $\lim_{y\to x^-} f(y)$ et à droite $\lim_{y\to x^+} f(y)$ en tout point $x\in\mathbb{R}$.
2. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.

(On pourra considérer, pour $n\geq 1$, les ensembles $A_n=\left\{x\in[-n,n] : \lim_{y\to x^+} f(y)-\lim_{y\to x^-} f(y)\geq \frac{1}{n}\right\}$.)

Exercice 5 *Fonction indicatrice*

Soient E un ensemble, A, B des parties de E et $(A_i)_{i\in I}$ une famille de partie de E.

1. Déterminer $\mathbf{1}_\emptyset$, $\mathbf{1}_E$ et calculer $\mathbf{1}_A^{-1}(J)$ pour tout $J\subset\mathbb{R}$.
2. Montrer que
   (a) $A\subset B$ si et et seulement si $\mathbf{1}_A\leq\mathbf{1}_B$ et $A=B$ si et seulement si $\mathbf{1}_A=\mathbf{1}_B$;
   (b) $\mathbf{1}_{A\cap B}=\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$ et $\mathbf{1}_{A^\complement}=1-\mathbf{1}_A$;
   (c) $\mathbf{1}_{A\cup B}=\mathbf{1}_A+\mathbf{1}_B-\mathbf{1}_A\mathbf{1}_B$;
   (d) $\mathbf{1}_{A\Delta B}=|\mathbf{1}_A-\mathbf{1}_B|$.
3. Montrer que $\mathbf{1}_{\cup_{i\in I}A_i}=\sup_{i\in I}\mathbf{1}_{A_i}$ et $\mathbf{1}_{\cap_{i\in I}A_i}=\inf_{i\in I}\mathbf{1}_{A_i}$.

Exercice 6 *Mesurabilité des ensembles de comparaison de fonctions*

Soient $(\mathbb{X},\mathcal{T}_\mathbb{X})$ un espace mesurable et f,g des applications mesurables de $\mathbb{X}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_+$ muni de la tribu borélienne. On souhaite montrer que les ensembles suivants sont des éléments de $\mathcal{T}_\mathbb{X}$:

$$A=\{x\in\mathbb{X} : f(x)<g(x)\},\quad B=\{x\in\mathbb{X} : f(x)\leq g(x)\},\quad C=\{x\in\mathbb{X} : f(x)=g(x)\}.$$

1. Montrer que A s'écrit encore $A=\bigcup_{q\in\mathbb{Q}}\{x\in\mathbb{X} : f(x)<q<g(x)\}$. En déduire que $A\in\mathcal{T}_\mathbb{X}$.
2. En déduire que $B, C\in\mathcal{T}_\mathbb{X}$.

Exercice 7 *Combinaison linéaire de mesures*

Soient $(\mathbb{X},\mathcal{T}_\mathbb{X})$ un espace mesurable, $(\alpha_k)_{k\geq 0}$ une suite de réels positifs et $(\mu_k)_{k\geq 0}$ une suite de mesures positives sur $\mathcal{T}_\mathbb{X}$.

1. Montrer que $\nu=\sum_{k\geq 0}\alpha_k\mu_k$ est une mesure positive sur $\mathcal{T}_\mathbb{X}$.
2. Si on suppose de plus que, pour tout $k\geq 0$, μ_k est une mesure de probabilité, à quelle condition a-t-on que ν est une probabilité ? Donner une interprétation géométrique de ce résultat (notamment dans le cas où la somme est finie).