TD1

MIANNAY Matteo

October 9, 2024

Sujets

Exercice 1: Points de discontinuité des fonctions croissantes

Montrer qu'une fonction croissante $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ admet des limites à gauche et à droite en tout point, puis montrer qu'elle admet au plus un nombre dénombrable de points de discontinuité.

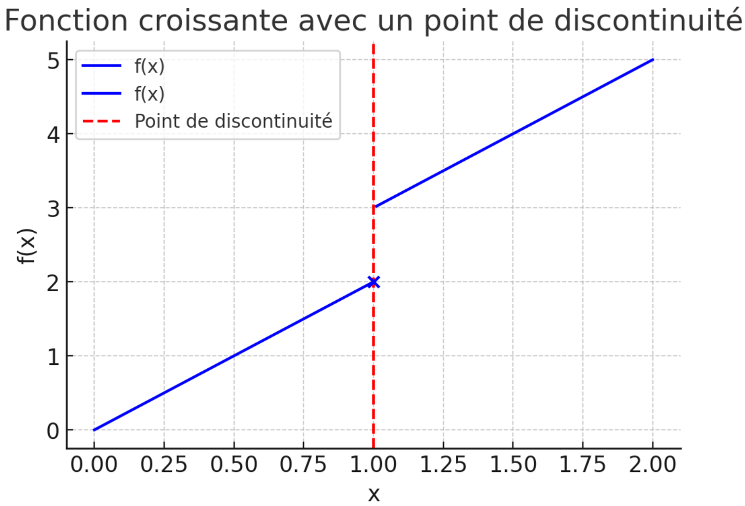

Figure 1: Un exemple d'un point de discontinuité. Crédits : chat gpt!

Correction

Solution :

Pour les limites à droite et à gauche : on voit bien que la limite à gauche en un point y est $\sup_{x<y} f(x)$. Pour la limite à droite, c'est $\inf_{x>y} f(x)$.

Montrons le pour la limite à gauche. Soit $y \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Par définition du sup, il existe $x_0 < y$ tel que

$$|\sup_{x<y} f(x) - f(x_0)| \overset{f \textbf{ croissante}}{=} \sup_{x<y} f(x) - f(x_0) < \epsilon.$$

On a alors par croissance de f, pour tout $t \in [x_0, y[, |\sup_{x<y} f(x) - f(t)| < \epsilon$, ce qui conclut. On procède de même pour la limite à droite..

Maintenant, il y a un nombre dénombrable de points de discontinuité : ce que nous avons montré, c'est que les points de discontinuité de f sont des "sauts". Il ne peut donc pas y en avoir tant que ça...

On note A l'ensemble des points de discontinuité.

Première preuve, sans l'indication :

Soit $x_1 \in A$. Alors la limite à droite et à gauche en x_1 existe d'après ce qui précède, mais ces deux limites ne coincident pas. On les note l^- et l^+. On peut donc, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, se donner un rationnel strictement compris entre l^- et l^+, que l'on note r_x.

On considère alors l'application $\varphi : A \longrightarrow \mathbb{Q}, x \mapsto r_x$. Elle est injective : Si $x \neq y$, par exemple $x < y$, on a $l_x^- < r_x < l_x^+ \leq l_y^- < r_y$. φ est donc injective, et on a une injection $A \hookrightarrow \mathbb{Q}$, lequel est dénombrable, ce qui conclut.

Correction

Deuxième preuve, avec l'indication :
On se ramène à des segments, où l'ont se convainc plus facilement qu'il ne peut pas y avoir beaucoup de sauts! On considère $A_n = \left\{x \in [-n,n], l_x^+ - l_x^- \geq \frac{1}{n}\right\}$. A_n est donc l'ensemble des points de $[-n,n]$ où on a un saut de plus de $\frac{1}{n}$. On peut facilement se convaincre du fait que $A = \cup_{n\geq 1} A_n$. Il reste à montrer que A_n est dénombrable. En fait, il est fini : Si on se donne $y_1, < y_2 < .... < y_p \in A_n$, on a alors :

$$f(y_p) - f(y_1) = \sum_{i=1}^{p-1} f(y_{i+1}) - f(y_i) \geq \sum_{i=1}^{p-1} \frac{1}{n} = \frac{p-1}{n}$$

. Donc $p \leq n(f(y_p)-f(y_1))+1 \overset{f \textbf{ croissante}}{\leq} n(f(n)-f(-n))+1$. Donc on a une majoration de p, c'est bien que $|A_n| \leq n(f(n)-f(-n))+1$. Donc A_n est fini, et A est réunion dénombrable d'ensemble au plus dénombrables (finis en l'occurence), donc est fini.

Exercice 2: Exercice 6 de la feuille

On se donne f, g définie sur $\mathcal{X}$ mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$ muni de sa tribu borélienne. On veut montrer que $A = \{f(x) < g(x), x \in \mathcal{X}\}$ est mesurable.

Correction

Solution :
L'exercice est simple en suivant les indications, ce qui suit n'est donc pas une correction mais une remarque. L'erreur à ne pas faire : on pourrait être tenté de dire que $f - g$ est mesurable, et donc que $A = (f-g)^{-1}(]0, +\infty[)$ est bien dans la tribu de départ. Néanmoins, $f - g$ n'est pas à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}_+}$. La fonction $f - g$ n'est à priori même pas définie : quel sens donner à $f(x) - g(x)$ quand les deux termes valent $+\infty$? C'est pour cette raison qu'on procède comme indiqué.