TD2 : Intégrale de Lebesgue

Cette collection d'exercices est directement issue des planches de TD rédigées par Basile de Loynes pour son cours d'intégration.

Exercice 1 *Quelques calculs d'intégrales contre des mesures discrètes*

Calculer $\int x\ \mu(dx)$ et $\int x^2\ \mu(dx)$ pour les mesures sur $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ suivantes :

$$\mu_1 = \frac{1}{2}\delta_0 + \frac{1}{2}\delta_1, \quad \mu_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\delta_k, \quad p \in (0,1), \quad \mu_3 = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!}\delta_k.$$

Que dire si l'on considère ces mesures comme des mesures sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$?

Exercice 2 *Troncation*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \mathbb{X} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ une fonction mesurable. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit $f_n = \min(f, n)$. Montrer que pour tout $n \geq 0$, f_n est mesurable et déterminer $\lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu$.

Exercice 3 *Convergence monotone décroissante*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante de fonctions mesurables positives.

1. On suppose que $\int f_0\ d\mu < \infty$. Montrer que
$$\lim_{n\to\infty} \int f_n\ d\mu = \int \lim_{n\to\infty} f_n\ d\mu.$$
2. Montrer que ce résultat n'est en général pas exact si on ne suppose pas $\int f_0\ d\mu < \infty$.
3. Quel résultat retrouve-t-on si l'on choisit $f_n = \mathbf{1}_{A_n}$, $(A_n)_{n\geq 0} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ décroissante ?

Exercice 4 *Intervertion de limite et d'intégrale*

Soit μ la mesure définie par $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1}\delta_k$. On définit la suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1}$, pour $n \geq 1$, par

$$f_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \mathbf{1}_{[0,n]}(x).$$

1. Pour tout $x \geq 0$, déterminer la limite de la suite $(f_n(x))_{n\geq 0}$.
2. On note g_n, $n \geq 0$, la fonction définie sur $[0, n)$ par $g_n(x) = \log f_{n+1}(x) - \log f_n(x)$. Montrer que g_n, $n \geq 0$, est positive. En déduire que $\{f_n\}_{n\geq 0}$ est une suite croissante.
3. Montrer que la suite $\left(\int f_n\ d\mu\right)_{n\geq 0}$ converge vers une limite à déterminer.

Exercice 5 *Un critère d'intégrabilité en mesure infinie*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ une application mesurable. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} 2^n \mu(\{2^n \leq |f| < 2^{n+1}\}) < \infty.$$

Soient $\alpha > 0$ et $f_\alpha : x \to x^{-\alpha}\mathbf{1}_{x>1}$. Pour quelles valeurs de α a-t-on que f_α est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue ?

Exercice 6 *Critère d'intégrabilité en mesure finie*

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : \mathbb{X} \to \mathbb{C}$ une application mesurable.

1. Vérifier que $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{|f|\geq n\}} = [|f|]$, où $[\cdot]$ est la fonction partie entière.
2. Montrer que si $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$ alors $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty$.
3. On suppose que μ est finie. Montrer que $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{|f| \geq n\}) < \infty$ implique $f \in \mathcal{L}^1(\mu)$. L'hypothèse μ finie est-elle nécessaire ?