TD1

MIANNAY Matteo

October 12, 2024

Sujets

Exercice 1: Calculs

$\mu_2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k$. Calculer $\int x d\mu_2(x)$ et $\int x^2 d\mu_2(x)$.

Correction

Solution :

On pose $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} x^k = (1-p+px)^n$. Alors : $\int x d\mu_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = P'(1) = np$, et $\int x^2 d\mu_2(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k^2 = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k(k-1) + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} k = P''(1) + P'(1) = n(n-1)p^2 + np = np((n-1)p+1)$. Autre méthode : $\binom{n}{k} = \frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$ (formule du capitaine), qu'on applique une fois, puis une deuxième.

Exercice 2: Exercice 6 de la feuille

Correction

1. On le vérifie ponctuellement. Soit $x \in \mathcal{X}$. Alors $\mathbb{1}_{|f|\geq n}(x) = 1$ si $n \leq \lfloor |f| \rfloor(x)$, 0 sinon.

   On a donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{|f|\geq n}(x) = \sum_{n=1}^{\lfloor |f| \rfloor(x)} 1 = \lfloor |f| \rfloor(x)$.

2. On sait que $\lfloor |f| \rfloor \leq |f|$. Donc $\lfloor |f| \rfloor$ est intégrable, donc $\displaystyle\int \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(|f|\geq n)} = \int \lfloor |f| \rfloor < \infty$.

   Par positivité, on peut permuter somme et intégrale, dès lors, on obtient :

   $$\int \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(|f|\geq n)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \int \mathbb{1}_{|f|\geq n} d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(|f| \geq n) < \infty,$$

   et c'est bon.

   Le "par positivité" est en fait une application du théorème de convergence monotone, avec la fonction croissante $f_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(|f|\geq k)}$ des sommes partielles de la série. On peut aussi le voir comme une application du théorème de Fubini.

3. On utilise $|f| \leq \lfloor |f| \rfloor + 1$. Et on obtient :

   $$\int_X |f| \leq \int_X \lfloor |f| \rfloor + 1 d\mu = \int_X \lfloor |f| \rfloor d\mu + \underbrace{\int_X 1 d\mu}_{=\mu(X)}$$

   . On peut bien séparer car les deux sont intégrables : la première par hypothèse (et l'égalité $\displaystyle\int \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{1}_{(|f|\geq n)} = \int \lfloor |f| \rfloor < \infty$), et la deuxième car X est de mesure finie. On a donc montré : $\displaystyle\int_X |f| \leq \int_X \lfloor |f| \rfloor + \mu(X)$, ce qui conclut.

   Un contre exemple : la mesure de comptage $\mu = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \delta_n$ sur $\mathbb{N}^*$, et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$. Alors pour $n \geq 2$, $\{f \geq n\} \cap \mathbb{N}^* = \emptyset$ est de mesure nulle. Dès lors, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \mu(\{|f| \geq n\}$ converge. Néanmoins, $\displaystyle\int_{\mathbb{N}^*} |f(n)| dn = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$.

   Remarque : si vous ne connaissez pas la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, c'est la mesure telle que $\displaystyle\int_{\mathbb{N}} f dn = \sum_{n=0}^{+\infty} f(n)$. On retrouve ainsi tout ce qu'on sait sur les séries, la théorie de Lebesgue est en quelque sorte "unificatrice"!