TD3 : Intervertion limite–intégrale

Cette collection d'exercices est directement issue des planches de TD rédigées par Basile de Loynes pour son cours d'intégration.

Exercice 1 *Intégrabilité et comportement à l'infini*

Construire une application $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

1. f est continue sur $\mathbb{R}_+$,
2. $\int f \; d\lambda < \infty$,
3. pour tout $a \in \mathbb{R}_+$, $\sup_{t \geq a} f(t) = \infty$.

Exercice 2 *Intégrabilité et convergence uniforme*

Donner un exemple de suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions mesurables positives sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ convergeant uniformément vers 0 et vérifiant l'une des propriétés suivantes :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n n'est pas intégrable,
2. pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int f_n \; d\lambda = 1$,
3. pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est intégrable et $\lim_{n\to\infty} \int f_n \; d\lambda = \infty$.

Exercice 3 *Intervertion limite-somme*

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$:

$$\text{(i) } u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+nk+1}\,; \qquad \text{(ii) } u_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{n^2}{kn^2+k^2}\,; \qquad \text{(iii) } u_n = \sum_{k=1}^{n^2} \frac{\sin k}{k^2}\left(\frac{k}{k+1}\right)^n;$$
$$\text{(iv) } u_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n+k}{nk^{3/2}+k^3}.$$

Exercice 4 *Intervertion limite-intégrale*

Dans chacun des exemples suivants, déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par

$$\text{(i) } u_n = \int_0^1 \frac{n}{1+x^2}\sin(x/n)\; dx\,; \qquad \text{(ii) } u_n = \int_0^\infty \frac{ne^{-x}}{nx+1}\; dx\,; \qquad \text{(iii) } u_n = \int_0^1 \frac{(\sin x)^n}{\sqrt{x}}\; dx\,;$$
$$\text{(iv) } u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{(\sin t)^n}{t(1+t)}\; \lambda(dt)\,; \qquad \text{(v) } u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin(t^n)}{t^n(1+t)}\; dt\,; \qquad \text{(vi) } u_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{dt}{\pi(1+|t|^{2+1/n})}\,;$$
$$\text{(vii) } u_n = \int_0^1 \left(1-e^{-t^2/n}\right)\; dt\,; \qquad \text{(viii) } u_n = \int_{\mathbb{R}} \frac{ne^{t^2}+1}{ne^{2t^2}+4t^2}\; dt\,; \qquad \text{(ix) } u_n = \int_0^n \frac{1}{n}\left(1+\frac{t}{n}\right)e^{-t/n}\; dt\,;$$
$$\text{(x) } u_n = \int_{]0,\infty[} \frac{\sin u}{u^2}\frac{u^{1/n}}{1+u^{1/n}}\; du\,; \qquad \text{(xi) } u_n = \int_0^\infty \frac{\sin(nx^n)}{nx^{n+1/2}}\; dx.$$

Exercice 5 *Autour du théorème de convergence dominée*

On munit l'ensemble $[0,1]$ de la tribu boréliene et de la mesure de Lebesgue. Pour $n \geq 3$, on pose $f_n = \frac{n}{(\log n)^2}\mathbf{1}_{[0,1/n]}$. Montrer que

1. pour tout $n \geq 3$, la fonction f_n est intégrable,
2. que la suite $(f_n)_{n\geq 3}$ tend vers 0 presque partout et $\lim_{n\to\infty}\int f_n \; d\lambda = 0$.

Déterminer la fonction $\sup_{n\geq 3} f_n$. Les hypothèses du théorème de convergence dominée sont-elles vérifiées ? En modifiant l'exemple précédent, montrer que l'on peut trouver une suite $(f_n)_{n\geq 0}$ de fonctions qui ne satisfont pas les conditions d'application du théorème de convergence dominée mais vérifient les points 1 et 2 ci-dessus.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 e^{-tx}\; dx$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. Calculer f'' et les limites en ∞ de f et f'.
3. En déduire une expression de f. Que vaut $f(0)$? Justifier.

Exercice 7

1. Montrer que la fonction $f : x \to \frac{\sin x}{e^x - 1}$ est Lebesgue intégrable sur $[0, \infty[$.
2. Montrer que pour tout $x > 0$, la quantité $f(x)$ peut encore s'écrire sous la forme $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-nx} \sin(x)$. Est-ce vrai pour $x = 0$?
3. En déduire que $\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{e^x - 1}\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}$.

Exercice 8 *Transformée de Fourier*

Soit $f \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}}(\lambda)$. La transformée de Fourier de f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\hat{f}(t) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{itx}\, dx.$$

1. Pourquoi $\hat{f}$ est-elle bien définie sur $\mathbb{R}$?
2. Montrer que si f est paire, alors $\hat{f}$ est à valeurs réelles.
3. Montrer que $\hat{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
4. On suppose de plus que $x \to x^k f(x)$ est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}$ pour $k \in \mathbb{N}$. Montrer que $\hat{f}$ est de classe C^k sur $\mathbb{R}$.
5. Calculer la transformée de Fourier des donctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f_1(x) = e^{-x}\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$ et $f_2 = e^{-|x|}$.