Exercice 1: Exercice 7, dernière question

On veut calculer $\int_0^{\infty} \frac{\sin(t)}{e^t-1}dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} \sin(t)e^{-nt}dt$ en permutant série intégrale.

Correction

Solution : On veut permuter série intégrale. Premier réflexe : intégration terme à terme. Pour cela, on doit montrer que $\sum_{n\geq 1} \int_0^{\infty} |\sin(t)e^{-nt}|dt$ converge. On regarde donc $u_n := \int_0^{\infty} |\sin(t)e^{-nt}|dt$. On se dit qu'en majorant le sinus par 1, on aura peut être le terme général d'une série qui converge, mais non : $\int_0^{\infty} e^{-nt}dt = \frac{1}{n}$ qui n'est pas le terme général d'une série qui converge.

Il faut donc ruser : on pose $f_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin(t)e^{-kt}$. On va appliquer le théorème de convergence dominée à f_n.

En effet, le TCVD s'applique : $|f_n(t)| \leq \sum_{k=1}^{n} |\sin(t)e^{-nt}| \leq \sum_{k=1}^{+\infty} |sin(t)|e^{-nt} = \frac{|\sin(t)|}{e^t-1}$ intégrable sur $\mathbb{R}_+$, et indépendant de n.

Donc le théorème de convergence dominée s'applique, et :

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_0^{\infty} f_n(t)dt = \int_0^{+} \infty \lim_{n\longrightarrow+\infty} f_n(t)dt,$$

d'où, en remplacant f_n par sa valeur : $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{\infty} \sin(t)e^{-nt}dt = \int_0^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sin(t)e^{-nt}dt$. Reste à calculer $\int_0^{\infty} \sin(t)e^{-nt}dt$. Mais on écrit $\sin(t) = Im(e^{it})$, et alors :

$$\int_0^{\infty} \sin(t)e^{-nt}dt = Im(\int_0^{\infty} e^{t(i-n)}dt) = Im(\frac{1}{i-n}[e^{t(i-n)}]_0^{\infty})$$

$$= Im(\frac{1}{n-i}) \overset{\times(n+i) en\ haut\ et\ en\ bas}{=} Im(\frac{n+i}{n^2+1}) = \frac{1}{n^2+1}$$

Ce qui conclut.