TD4 : Intégration sur un espace produit

Cette collection d'exercices est directement issue des planches de TD rédigées par Basile de Loynes pour son cours d'intégration.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times [0,1]$ par $f(x,y) = 2e^{-2xy} - e^{-xy}$.

1. Montrer que f est $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{B}([0,1])$-mesurable.
2. Calculer $\int_{[0,1]} \left(\int_{\mathbb{R}_+} f(x,y)\ dx \right)\ dy$ et $\int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{[0,1]} f(x,y)\ dy \right)\ dx$. Conclure.

Exercice 2

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne positive.

1. Montrer que l'ensemble $A_f = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le y \le f(x) \right\}$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$ et calculer $\lambda_2(A_f)$.
2. Même question pour le graphe de f défini par $G_f = \left\{ (x, f(x)) : x \in \mathbb{R} \right\}$.
3. En déduire que $\lambda(\{x \in \mathbb{R} : f(x) = y\}) = 0$, $\lambda(dy)$-p.p..

Exercice 3

Soit $(\mathbb{X}, \mathcal{X}, \mu)$ un espace mesuré. Soient f et g deux fonctions mesurables positives sur $(\mathbb{X}, \mathcal{X})$.

1. Montrer que $A = \{(x,t) \in \mathbb{X} \times \mathbb{R}_+ : f(x) \ge t\} \in \mathcal{X} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
2. Montrer que $\int_{\mathbb{X}} f\ d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} \mu(\{f \ge t\})\ \lambda(dt)$.
3. En déduire que pour tout $p \ge 1$, $\int_{\mathbb{X}} g^p\ d\mu = \int_{\mathbb{R}_+} pt^{p-1}\mu(\{g \ge t\})\ \lambda(dt)$.
4. Que dire de $\int_{\mathbb{X}} \phi \circ f\ d\mu$ si ϕ est croissante de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+$ qui s'annule en 0.
5. En considérant l'application de $\mathbb{X} \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$, notée F, qui à (x,s,t) associe $\mathbf{1}_{[s,\infty[}(f(x))\mathbf{1}_{[t,\infty[}(g(x))$, montrer que
$$\int_{\mathbb{X}} fg\ d\mu = \int_{\mathbb{R}_+^2} \mu(\{f \ge s\} \cap \{g \ge t\})\ dsdt.$$

Exercice 4

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}^2$ et calculer, si elles existent, les intégrales itérées $\int_I \int_I f(x,y)\ dxdy$ et $\int_I \int_I f(x,y)\ dydx$.

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2},\ \text{avec } I = [0,1] \quad \text{et} \quad f(x,y) = \begin{cases} -1 & \text{si } x > 0 \text{ et } 0 < y - x \le 1, \\ 2 & \text{si } x > 0 \text{ et } 1 < y - x \le 2, \\ -1 & \text{si } x > 0 \text{ et } 2 < y - x \le 3, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{avec } I = \mathbb{R}.$$

Exercice 5

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ par

$$f(t) = \int_0^\infty \frac{\sin x}{x} e^{-tx}\ dx \quad \text{et} \quad g(t) = \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 e^{-tx}\ dx.$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et g sur $\mathbb{R}_+$.
2. Calculer $f(t)$ pour tout $t > 0$ en partant de l'égalité $\frac{\sin x}{x} = \int_0^1 \cos(xy)\ dy$.
3. Calculer $g(t)$ pour tout $t > 0$ en partant de l'égalité $\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 = \int_0^1 \frac{\sin(2xy)}{x}\ dy$. En déduire $g(0)$.

Exercice 6 *Intégration par parties*

1. Soient μ et ν deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. On désigne par F et G leurs fonctions de répartition respectives, c'est à dire
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \mu(]-\infty, x]) \quad \text{et} \quad G(x) = \nu(]-\infty, x]).$$
Pour des réels fixés a et b, avec $a < b$, on définit $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a < y \leq x \leq b\}$. En calculant de deux façons différentes $\mu \otimes \nu(A)$, montrer que
$$\int_{]a,b]} F(t^-)\nu(dt) + \int_{]a,b]} G(t)\mu(dt) = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

2. Soient f et g deux fonctions mesurables positives et λ-intégrable sur $\mathbb{R}$. On pose
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f \, d\lambda \quad \text{et} \quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} g \, d\lambda.$$
Montrer que F et G sont les fonctions de répartitions de deux mesures finies sur $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. En déduire que
$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a < b, \quad \int_{[a,b]} F(x)g(x) \, dx + \int_{[a,b]} f(x)G(x) \, dx = F(b)G(b) - F(a)G(a).$$

3. Que se passe-t-il dans la question précédante si l'on remplace la mesure de Lebesgue λ par la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$?

Exercice 7 *Convolution*

Soient f et g deux fonctions de $\mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^d}(\lambda_d)$. On définit le produit de convolution de f avec g, noté $f * g$, sur $\mathbb{R}^d$ par
$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \quad f * g(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t) \, dt.$$

1. Montrer que $f * g \in \mathcal{L}^1_{\mathbb{R}^d}$ et que $f * g = g * f$.
2. Calculer $f * g$ pour $f = g = \mathbf{1}_{[0,1]}$ (d=1). Commenter.
3. Montrer que si f est de classe C^k à support compact, alors il en va de même pour $f * g$.
4. Montrer que si f et g sont positives d'intégrale 1, il en va de même pour $f * g$.
5. Montrer que $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$. *(On pourra supposer $d = 1$.)*