Exercice 1:

Dernier exo (Fourier). La question 3 est fausse (ou mal posée). Si f est C^k à support compact, alors $f * g$ est C^k, mais pas forcément à support compact (exemple : $f = \mathbb{1}_{(-1,1)}, g = \dfrac{1}{1+x^2}$). On retiendra que la convolution a un pouvoir régularisant : si l'une des deux fonctions est régulière, la convolution hérite de sa régularité. En l'occurence, on montre que si f est C^k à support compact, $f * g$ est C^k, de dérivée $f^{(k)} * g$, et ce dès que g est L^1; alors que les fonctions L^1 peuvent à priori être très moches... Enfin, quand f et g représentent des densité de variables à densité X et Y indépendantes, vous verrez que $X+Y$ est à densité, de densité $f*g$. Et pour finir : on a montré que L^1 muni de la loi $*$ est une algèbre. C'est même une algèbre de Banach (vous verrez peut être ça bientôt), et elle a la particularité de ne pas avoir d'unité, c'est à dire qu'il n'existe pas de fonctions g telle que pour tout $f \in L^1$, $f * g = f$. La preuve est assez simple, et utilise des résultats de transformée de Fourier.

La correction est juste derrière!

Correction

Solution :

1. $\int_{\mathbb{R}^d} |f*g(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} |\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dt|dx \overset{\textit{inégalité triangulaire}}{\leq} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)||g(t)|dtdx \overset{\textit{Fubini} >0}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)||g(t)|dxdt = \int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|\big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(x-t)dx\big)dt \overset{u=x-t}{=} \int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|\big(\int_{\mathbb{R}^d} |f(u)|du\big)dt = \int_{\mathbb{R}^d} |g(t)|||f||_1dt = ||f||_1||g||_1 < \infty$. On a donc montré que $f*g$ est L^1, et on a de plus l'estimation $||f*g||_1 \leq ||f||_1||g||_1$. Pour montrer que $f*g = g*f$: $u = x-t$ dans l'intégrale.

2. On trouve une fonction triangle.

3. En route... Théorème de classe C^k sous l'intégrale.

   - Pour tout $t \in \mathbb{R}, x \mapsto f(x-t)g(t)$ est C^k, de dérivée $x \mapsto f^{(i)}(x-t)g(t)$, pour $0 \leq i \leq k$.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $t \mapsto f(x-t)g(t)$ est intégrable, ainsi que ses dérivées : c'est la question 1 (les dérivées sont L^1 car à support compact également).
   - Enfin, pour $x, t \in \mathbb{R}^2$, $|f^{(k)}(x-t)g(t)| \leq ||f^{(k)}||_\infty |g(t)|$. Cette domination ne dépend pas de x, est L^1 car g l'est. La norme infinie existe bien et est finie car la fonction est à support compact.

   Le théorème de dérivation sous l'intégrale s'applique donc, et c'est bon!

4. Pour la positivité : clair, on intègre des fonctions positives. Pour l'intégrale :

$$\int_{\mathbb{R}^d} f*g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dtdx$$

$$\overset{\textbf{Fubini positif}}{=} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)g(t)dxdt = \int_{\mathbb{R}^d} g(t)\int_{\mathbb{R}^d} f(x-t)dxdt$$

$$\overset{u=x-t}{=} \int_{\mathbb{R}^d} g(t)\int_{\mathbb{R}^d} f(u)dudt = \int_{\mathbb{R}^d} g(t) = 1$$

5. Les différentes transformées de Fourier sont bien définies car tout le monde est intégrable.

$$\widehat{f*g}(\zeta) = \int_{\mathbb{R}} f*g(x)e^{i\zeta x}dx = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)e^{i\zeta x}dtdx$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)g(t)e^{i\zeta(x-t)}e^{i\zeta t}dtdx \overset{\textit{Fubini Tonnelli}}{=}$$

$$\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{i\zeta t}\int_{\mathbb{R}} f(x-t)e^{i\zeta(x-t)}dxdt = \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} g(t)e^{i\zeta t}\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{i\zeta u}dudt$$

$$= \hat{g}(\zeta)\hat{f}(\zeta).$$

Exercice 2:

Le 4 de la feuille.... Figurez vous que les autres chargé de TD ont eu la bonne idée de ne pas le traiter, et de même pour l'exercice 3 avec l'intégrale triple. Désolé donc de vous avoir infligé ça. Tout ce qu'il faut retenir : le changement de variable en coordonnées polaires, et son jacobien qui vaut r. Vous n'êtes pas obligés de lire ce qui suit.

Correction

Aucune des deux n'est intégrable. Pour la première, on fait un chgt de variable en coordonnée polaire $(x, y) = (r\sin(\theta), r\cos(\theta))$ avec $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et $r \in]0, 1]$. Alors le jacobien est r et l'intégrale de $|f|$ sur $I \times I$ devient $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{r^2|\sin\theta^2 - \cos\theta^2|}{r^4} r dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 \frac{1}{r} |\sin\theta^2 - \cos\theta^2| dr d\theta =$
$\underbrace{\int_0^{\frac{\pi}{2}} |\sin\theta^2 - \cos\theta^2| d\theta}_{>0} \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{r} dr}_{=+\infty} = +\infty$. Donc f n'est pas intégrable.

La deuxième fonction n'est pas intégrable car en module elle est plus grande que 1 sur un ensemble de mesure infinie. Pour calculer les intégrales voulues; pour la première, beaucoup de calculs très lourds avec décomposition en éléments simples. On s'en passera. Pour la deuxième on utilise $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \mathbb{1}_B$, pour écrire $f = \mathbb{1}_{x>0}\big(-\mathbb{1}_{0\leq y-x\leq 1} + 2\mathbb{1}_{1\leq y-x\leq 2} - \mathbb{1}_{2\leq y-x\leq 3}\big)$, on a, pour $x \in \mathbb{R}$: $\int_0^1 f(x, y)dy$ $= \int_0^1 \mathbb{1}_{x>0}(x, y)\big(-\mathbb{1}_{x\leq y\leq x+1} + 2\mathbb{1}_{x+1\leq y\leq x+2} - \mathbb{1}_{x+2\leq y\leq x+3}\big)(x, y)dy =$ $-\int_x^{x+1} \mathbb{1}_{x>0}(x, y)dy + 2\int_{x+1}^{x+2} \mathbb{1}_{x>0}(x, y)dy - \int_{x+2}^{x+3} \mathbb{1}_{x>0}(x, y)dy$. On fait alors un changement de variable affine dans les deux dernières intégrales, et on trouve $\int_x^{x+1} -\mathbb{1}_{x>0}(x, y) + 2\mathbb{1}_{x>0}(x, y+1) - \mathbb{1}_{x>0}(x, y+2)dy$. Mais les indicatrices sont toutes égales ($x > 0$ ne dépend pas de y). Donc on trouve $\int_x^{x+1} \mathbb{1}_{x>0}(x, y) \underbrace{(-1 + 2 - 1)}_{=0} dy =$ 0, et donc $\int_I \int_I f(x, y)dydx = 0$. Pour l'autre sens : on fait pareil. J'ai un peu triché, en cours j'avais commencé à calcule l'autre sens ($dxdy$), et ça donnait des conditions un peu plus moches, avec des $-$ partout, mais le fonctionnement reste le même... Il n'est pas dit qu'on tombe sur zéro de l'autre côté, la fonction n'étant pas intégrable, on a pas Fubini Tonnelli qui nous le garantit.