TD6 : Changement de variables

Cette collection d'exercices est directement issue des planches de TD rédigées par Basile de Loynes pour son cours d'intégration.

Exercice 1 *Normalisation de la gaussienne*

Soit $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie pour $(x,y) \in \mathbb{R}_+^2$ par $f(x,y) = y \exp\left(-y^2(1+x^2)/2\right)$. Après avoir justifié que f est Lebesgue intégrable sur $\mathbb{R}_+^2$, montrer en calculant de deux façons différentes $\int_{\mathbb{R}_+^2} f(x,y)\, dxdy$ que

$$\int_0^\infty e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 2

Calculer, en justifiant, les intégrales suivantes

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \sin(y) e^{-(x+y)}\, dxdy \quad \text{et} \quad \int_\Delta xy^2\, dxdy,$$

où Δ est le domaine intérieur au triangle ABC avec $A = (0,-1)$, $B = (1,3)$ et $C = (0,1)$.

Exercice 3 *Fonction Gamma d'Euler*

On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx$.

1. Montrer que la fonction Γ est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$. En déduire que $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\Gamma(1/2) = \sqrt{2}\int_0^\infty e^{-u^2/2}\, du = \sqrt{\pi}$. En déduire la valeur de $\Gamma(n+1/2)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer, en considérant le changement de variables $x = \phi(u) = t + u\sqrt{t}$ que
$$\Gamma(t+1) = t^t\sqrt{t}e^{-t}\int_{-\sqrt{t}}^\infty \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}}\, du.$$
3. En déduire que, pour toute suite de réels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tendant vers ∞,
$$\liminf_{n\to\infty} \left(\frac{e}{t_n}\right)^{t_n} \frac{\Gamma(t_n+1)}{\sqrt{t_n}} \geq \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2/2}\, du = \sqrt{2\pi}.$$
4. Montrer que $\lim_{t\to\infty} \int_{-\sqrt{t}}^0 \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On pourra pour cela poser $u = -v$ et remarquer que pour tout $x \in]-1,0]$, $\log(1+x) \leq x - x^2/2$.
5. Montrer que $\lim_{t\to\infty} \int_0^\infty \left(1 + \frac{u}{\sqrt{t}}\right)^t e^{-u\sqrt{t}}\, du = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. On pourra étudier les variations de la fonction suivante : $x \to \log(1+x) - x + x^2/(2(1+x))$.
6. Établir la formule de Stirling étendue : $\Gamma(t+1) \sim_{t\to\infty} \left(\frac{t}{e}\right)^t \sqrt{2\pi t}$.

Exercice 4 *Fonction Beta d'Euler*

Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$. Soit ϕ la fonction de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ dans $\mathbb{R}^2$ définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ par

$$\phi(x,y) = \left(x + y, \frac{x}{x+y}\right).$$

On fixe a, b deux réels strictement positifs.

1. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta$ dans $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$.
2. Déterminer graphiquement $\phi(]-\infty,-1]^2)$, $\phi(]0,\infty[^2)$ et $\phi(]0,1]^2)$.
3. Montrer que la fonction $f : v \to v^{a-1}(1-v)^{b-1}\mathbf{1}_{]0,1[}(v)$ est Lebesgue intégrable.
4. Soit ν la mesure sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ de densité f. Montrer que
$$\int_{]0,\infty[^2} e^{-(x+y)} x^{a-1} y^{b-1}\, dxdy = \nu(\mathbb{R})\Gamma(a+b).$$

   En déduire $\nu(\mathbb{R})$.

Exercice 5 *Fonction Beta d'Euler, suite*

On pose $B(a,b) = \int_{]0,1[} v^{a-1}(1-v)^{b-1}\, dv$ pour a, b des réels. Soient p, q, r et s des réels strictement positifs.

1. Calculer, en fonction de B, l'intégrale
$$J = \int_D x^{p-1}y^{q-1}z^{r-1}(1-x-y-z)^{s-1}\, dxdydz,$$
où $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* : x+y+z < 1\}$. On pourra utiliser le changement de variables
$$X = x+y+z, \quad Y = \frac{y+z}{x+y+z}, \quad Z = \frac{z}{x+y+z}.$$
2. Exprimer J en fonction de Γ. Qu'obtient-on lorsque p, q, r et r sont des entiers.

Exercice 6 *Calcul d'intégrales multiples*

1. Pour le domaine $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0, y > 0, 1/2 < x+y < 1\}$, calculer $\int_D \exp\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\, dxdy$.
2. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2+2y^2 < 2, 0 < y < x\}$. Trouver un difféomorphisme T de D dans $D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u < 2, 0 < v < 1\}$. Calculer $\int_D \frac{x^2-y^2}{x^2}\, dxdy$.
3. Calculer $\int_D \frac{dxdy}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}}$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ pour des réels non nuls a, b.

Exercice 7

1. Montrer que l'application $\phi : (x,y) \to (x+y, xy)$ de $\mathbb{R}^2$ dans lui-même est un C^1-difféomorphisme de
$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\} \quad \text{dans} \quad V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : u > 0, v > 0, u^2 > 4v\}.$$
2. Soit $\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2 < x+y < 4, xy > 1, x < y\}$. Calculer l'intégrale, après avoir justifié son existence, $\int_\Delta (x^2-y^2)\cos(xy)\, dxdy$.

Exercice 8 *Volume d'une boule*

On cherche à calculer le volume V_n de la boule euclidienne B_n de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, définie par
$$B_n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$
On note λ_n la mesure de Lebesgue dans $\mathbb{R}^n$ (donc $V_n = \lambda_n(B_n)$).

1. Calculer V_1 et V_2.
2. Soit $n \geq 3$, montrer que
$$V_n = V_{n-2} \int_{B_2} (1-x_1^2-x_2^2)^{(n-2)/2}\, d\lambda_2(x_1,x_2).$$
3. En déduire que $V_n = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}$ et que $V_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$.
4. Montrer que $\lambda_n(rB_n) = r^d V_n$ pour tout $r \geq 0$.