Préparation à l'agrégation

Mémoire

Utilisation de la notion de compacité

MIANNAY Matteo
Promo 2022

TUTEUR : BEKKA Bachir

https://perso.eleves.ens-rennes.fr/people/matteo.miannay (lien cliquable)

Décembre 2023

Table des matières

1 Introduction

1.1 Motivations

Les espaces compacts sont une classe d'espaces topologiques bénéficiant de propriétés des plus agréables. En particulier, on en distingue trois types, les propriétés d'existence (d'une valeur d'adhérence en particulier, utiles pour minimiser des fonctionnelles), les propriétés de régularité (uniforme continuité, bicontinuité) mais aussi des propriétés d'optimisation (les fonctions continues y atteignent leurs bornes). L'objet de cette leçon est donc de faire un panorama des applications de la compacité dans des domaines variés des mathématiques.

1.2 Premières définitions

Définition 1. *Un espace topologique X est dit compact si il est séparé et vérifie la propriété de Borel-Lebesgue : de tout recouvrement d'ouverts on peut en extraire un recouvrement fini.*

Exemple 2. *$\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ est compact pour la topologie quotient, tandis que $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$ ne l'est pas pour la topologie quotient, bien qu'il vérifie la propriété de Borel Lebesgue.*

Définition 3. *Une partie A d'un espace topologique X est dite compacte si elle est compacte pour la topologie induite.*

Propriété 4. *Dans le cas d'un espace métrique, un espace X est dit compact si de toute suite on peut extraire une sous-suite convergente. C'est la propriété de Bolzano-Weierstrass.*

Dans la suite, nous nous placerons dans les cas des espaces métriques. On a alors :

Propriété 5. *Les compacts sont fermés et bornés.*

Remarque 6. *Tout compact est séparable.*

Donnons un premier exemple d'application élémentaire de la compacité illustrant bien le passage du "local au global" :

Exemple 7. *Soit $f : X \longrightarrow X$ où X est compact localement lipschitzienne. Alors f est lipschitzienne.*

Démonstration. En tout point x de X il existe un voisinage ouvert tel que f soit λ_x lipschitz sur ce voisinage ouvert. Ces voisinages recouvrent X, on peut donc en extraire un nombre fini, le plus grand des rapports de lipschitz convient alors. □

Poursuivons ce premier compact avec la compacité par une caractérisation "pratique" :

Définition 8. *On dit que X est précompact si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon ε.*

Propriété 9. *Les deux points suivants sont équivalents :*

1. *X est compact*
2. *X est précompact et complet.*

1.3 Propriétés élementaires

Propriété 10. *Si X est un compact, $f : X \longrightarrow Y$ continue, alors $f(Y)$ est compact.*

Démonstration. On utilise la caractérisation de Bolzano-Weierstrass. Soit $(y_n) \in f(Y)^{\mathbb{N}}$. On écrit $y_n = f(x_n)$ où $x_n \in X$, et donc X étant compact, x_n admet une valeur d'adhérence. Quitte à extraire, on peut supposer que (x_n) converge vers $x \in X$, donc par continuité de f on a bien $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, ce qu'on voulait. □

Une application absolument essentielle, mère de beaucoup de résultats, est la suivante :

Théorème 11 (Théorème des bornes atteintes)**.** *Si $f : X \longrightarrow Y$ est une application continue sur un compact X, alors elle est bornée et atteint ses bornes.*

On déduit de ce théorème moult résultats d'analyse réelle, en particulier les théorèmes de Rolle, des accroissements finis, et tant d'autres.

On en déduit également le théorème spectral en extrémalisant $x \mapsto \dfrac{(Ax|x)}{(x|x)}$ sur la boule unité de $\mathbb{R}^n$, dont on verra bientôt qu'elle est compacte.

Remarque 12. *L'image d'un compact par une application continue est toujours un compact, mais ce n'est pas le cas de l'image réciproque.*

Cette remarque conduit à la définition suivante :

Définition 13. *Soit f continue sur un espace métrique X à valeurs dans ce même espace. Alors f est dite propre si l'image réciproque de tout compact par f est un compact.*

Et les fonctions propres permettent la caractérisation suivante, nommée "théorème d'Hadamard-Lévy" :

Théorème 14 (Théorème de Hadamard-Lévy)**.** *Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction $\mathcal{C}^2$. Alors les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme,*
2. *f est propre et pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, df_x est inversible.*

Démonstration. La preuve de ce résultat consiste à appliquer le théorème d'inversion globale en montrant que f est bijective ; pour cela on considère une équation différentielle telle que f soit décroissante vers 0 le long des trajectoires, montrant ainsi l'existence d'un antécédent à 0 en faisant converger une trajectoire par compacité. Reste à montrer l'unicité d'un tel antécédent, pour cela on montre que les zéros de f sont exactement les points d'équilibre du système, on montre alors qu'ils sont stables et qu'il en existe un unique avec des arguments de connexité. On a montré alors que 0 a un unique antécédent par f, ce qui se généralise aux autres points en appliquant ceci à $f - y$, et conclut. □

Une autre propriété "d'existence" des espaces compacts est la suivante :

Théorème 15 (Des fermés emboités). *Soit X un espace compact, $F_0 \subset \cdots \subset F_n$ des fermés emboîtés (indexés par $\mathbb{N}$). Alors $\cap_n F_n$ est un compact non vide.*

Parmi les applications, on peut remarquer la suivante :

Théorème 16. *Tout espace compact est de Baire.*

Enfin, un autre résultat capital est le suivant :

Théorème 17 (Théorème de Heine). *Toute fonction continue sur un compact est uniformément continue.*

Une application de ce résultat est la continuité de la translation dans les espaces L^p, que l'on montre par densité des fonctions continues à support compact.

1.4 Théorèmes de point-fixe

On connaît le théorème suivant :

Théorème 18. *Si $f : E \longrightarrow E$ est continue de E métrique complet dans lui même est k-contractante, alors f admet un unique point-fixe.*

On peut alors demander une hypothèse plus forte sur E (de compacité) tout en allégeant l'hypothèse sur f, on obtient alors :

Propriété 19. *Soit f 1-lipschzienne de E compact dans lui-même. Alors f admet un point-fixe.*

Démonstration. On se ramène au cas précédent en perturbant f pour la rendre contractante. On obtient ainsi une suite de presque-point fixe, qu'on fait converger... vers un point fixe. □

Enfin, un dernier résultat de point fixe, moins élementaire, est le suivant :

Théorème 20 (Point fixe de Kakutani). *Soit $K \subset E$ un convexe compact non vide, $T : K \longrightarrow K$ une application affine continue. Alors T admet un point-fixe.*

Le théorème de Kakutani permet de montrer que si X est un métrique compact, f un homéomorphisme de X, alors il existe une mesure de probabilité sur les boréliens de X qui soit f-invariante. Ceci sert en particulier dans l'étude des groupes symplectiques réels ; pour en savoir plus : Mathématiques générales 2016.

Et dans le cas particulier des sous-groupes de $GL_n(\mathbb{R})$, on a le résultat suivant :

Théorème 21. *$O_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe compact maximal de $GL_n(\mathbb{R})$. De plus, tout sous groupe compact de $GL_n(\mathbb{R})$ est conjugué à un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$.*

Pour rester dans le thème $O_n(\mathbb{R})$, la décomposition polaire est une application absolument essentielle de la compacité.

Théorème 22 (Décomposition polaire). *L'application $O_n(\mathbb{R}) \times S_n^{++} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R}), (O, S) \mapsto OS$ est un homéomorphisme.*

2 Le cas des EVN

On se place, dans ce chapitre, dans un EVN.

Une application fondamentale de la compacité est l'équivalence des normes dans un espace de dimension finie. On suppose ici que E est un evn de dimension finie.

Alors :

Théorème 23. *La boule unité de E est compacte pour la norme infinie.*

De ce résultat, découlant facilement de la propriété de Bolzano Weierstrass dans $\mathbb{R}$, on en déduit le fondamental résultat suivant :

Théorème 24. *Les normes sont équivalentes en dimension finie.*

Démonstration. On montre que $I_d : (S_n, ||\cdot||_\infty) \longrightarrow (S_n, ||\cdot||)$ est continue. Elle est donc bornée, et atteint ses bornes, ce qui conclut. □

On en déduit un autre résultat fondamental :

Propriété 25. *Les compacts en dimension finie sont exactement les fermés bornés.*

Enfin, on en déduit la caractérisation suivante des compacts, utile en analyse fonctionnelle :

Théorème 26 (Théorème de Riesz)**.** *E est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte.*

Une application amusante est la suivante : $H(\Omega)$ muni de la topologie uniforme sous tout compact n'est pas normable.

3 Détour par les espaces fonctionnels

Dans la théorie des suites de fonctions, les espaces compacts sont très pratiques. En particulier, on a le résultat suivant, aux applications infinies :

Théorème 27 (Théorème de Dini)**.** *Soit (f_n), f des fonctions continues sur un compact X telle que la suite (f_n) est décroissante et converge simplement vers f. Alors la convergence est uniforme.*

Parmi les applications de ce théorème, une application notable est :

Propriété 28. *Il existe une suite de polynômes approchant la valeur absolue sur le segment $[-1; 1]$*

Dont on déduit le bien connu théorème de Stone-Weierstrass :

Théorème 29. *Toute sous-algèbre séparante de $C^0(X, \mathbb{R})$contenant les fonctions constantes est dense dans $C^0(X, \mathbb{R})$.*

Remarque 30. *L'espace des fonctions continues sur un compact est ici, comme usuellement, muni de la topologie de la convergence uniforme.*

Dans les espaces $C^0(E,F)$, où E est compact, F complet, on a le critère suivant, dit d'Ascoli :

Théorème 31 (Théorème d'Ascoli)**.** *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. $A \subset C^0(E,F)$ *est précompacte*
2. (a) $\forall x \in E, A_x = \{f(x), f \in A\}$ *est borné*
   (b) A *est équicontinue*

De ce résultat, dont la démonstration est laborieuse, on déduit des résultats essentiels, en particulier le suivant :

Théorème 32 (Théorème de Cauchy-Arzeala-Peano)**.** *Si on considère $f : I \times E$ où I est un intervalle non vide, E est de dimension finie, alors le problème de Cauchy $y' = f(t,y), f(x_0) = y_0$ admet une solution maximale.*

Remarque 33. *Par rapport à Cauchy-Lipschitz, on perd l'unicité.*

Un autre résultat remarquable de compacité dans les espaces fonctionnels est le théorème de Montel :

Théorème 34 (Montel)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, (f_n) des fonctions holomorphes sur Ω telles que pour tout compact $K \in \Omega$, on ait :*

$$\exists M > 0, \forall z \in K, \forall n \in \mathbb{N}, |f_n(z)| \leq M.$$

Alors il existe une suite extraite $(f_{\phi(n)})$ convergeant uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction holomorphe.

Démonstration. Montrons ce résultat. On veut appliquer le théorème d'Ascoli sur une suite exhaustive de compacts, puis extraire diagonalement. Soit donc K un compact de Ω. Si $z \in K, \{f_n(z), n \in \mathbb{N}\}$ est bornée indépendamment de n et z par C_K une constante associée au caractère borné de la suite sur K. Ceci montre le caractère équiborné. Le caractère le plus compliqué est le caractère équicontinu. Soit $z \in \mathbb{K}$, U est ouvert donc soit $D(z_0,r) \subset U$, et $z \in D\left(z_0, \frac{r}{2}\right)$ alors

$$|f_n(z) - f_n(z_0)| \leq ||f_n'||_{D(z_0,\frac{r}{2})}|z - z_0|$$

. A priori, c'est perdu : nous n'avons pas de contrôle sur la norme infinie de la dérivée, seulement sur les (f_n). Mais c'est sans compter sur la magie de la formule de Cauchy :

$$\forall z \in D(z_0, \frac{r}{2}), f'(z) = \frac{1}{2i\pi}\int_{D(z_0,r)} \frac{f(\omega)}{(z-\omega)^2}d\omega = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0+re^{it})ire^{it}}{(z-z_0-re^{it})^2}dt.$$

Une inégalité triangulaire donne donc :

$$|f'(z)| \leq \frac{r}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{||f||_{D(z_0,r)}}{|z-z_0-re^{it}|^2} \leq \frac{4}{r}||f||_{D(z_0,r)} = \frac{4}{r}M$$

où M ne dépend pas de z. Dès lors, en reprenant nos calculs où on les a laissé, on trouve : $|f_n(z) - f_n(z_0)| \leq \frac{4}{r}M|z - z_0|$. Ainsi, en rendant z_0 suffisament proche de z, on rend les $|f_n(z)-f_n(z_0)|$ arbitrairement petits indépendamment de n, c'est exactement l'équicontinuité de la famille !

Dès lors, le théorème d'Ascoli s'applique à la suite (f_n), et on a donc une sous suite convergeant uniformément sur K.

Maintenant, on fixe (K_n) une exhaustion de U par des compacts. (un exemple en est donné dans la remarque qui suit). On applique ce qui précède à K_0, puis on applique ce qui précède à la suite obtenue précédemment sur K_1... On obtient ainsi une suite d'extractrices $\phi_0, ...\phi_n$. Par extraction diagonale, en prenant $\varphi(n) = \phi_0 \circ \phi_1 \circ \cdots \circ \phi_n(n)$, on obtient une extractrice telle que $f_{\varphi(n)}$ converge uniformément sur tout compact vers une fonction f. La convergence étant uniforme sur tout compact, la limite est une fonction holomorphe d'après le théorème de Weierstrass, ce qui achève la démonstration.

$\square$

Remarque 35. *A priori, $H(\Omega)$ n'est pas un espace métrique et ce résultat n'est pas un résultat de compacité. Néanmoins, on peut le munir d'une métrique qui le rend complet grâce à une famille de semi-normes définies sur une suite exhaustive de compacts.*

Plus précisement, une suite exhaustive de compacts peut être donnée par :

$$K_n = \left\{ z \in \mathbb{C}, |z| \leq n, \mathrm{d}(z, \Omega^c) \geq \frac{1}{n} \right\}$$

, notre métrique est alors donnée par :

$$\mathrm{d}(f,g) = \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-k} \frac{||f-g||_{\infty,K_n}}{1+||f-g||_{\infty,K_n}}$$

Enfin, du théorème de Montel on peut déduire le théorème d'Osgood :

Théorème 36 (Théorème d'Osgood)**.** *Si U est un ouvert de $\mathbb{C}$, (f_n) une suite de fonctions holomorphes convergeant simplement vers f, alors il existe $U' \subset U$, dense dans U tel que f soit holomorphe sur U'.*

Remarque 37. *C'est remarquable !*

Démonstration. On prend $U = \mathbb{C}$ pour limiter les notations, la démonstration s'adaptant très facilement. On prend U l'union des ouverts sur lesquels la limite f est holomorphe. Alors U est un ouvert. On va montrer que U rencontre tout disque fermé de $\mathbb{C}$, ce qui revient exactement à montrer que U est un ouvert dense. Soit D un disque fermé de $\mathbb{C}$. Alors D est complet car fermé dans un complet, donc de Baire. On pose $F_k = \left\{ x \in D, \sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leq k \right\}$. Alors comme pour tout $x \in D$, $(f_n(x))$ est une suite convergente, $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} F_k = D$. Donc par le théorème de Baire, l'un des F_k est d'intérieur non vide, disons F_p. Alors sur F_p, les hypothèses du théorème de Montel s'appliquent sans soucis car les f_n sont majorées uniformément par p sur F_p donc sur tout compact ! Dès lors, la restriction des (f_n) à F_p admet une sous-suite qui converge uniformément sur tout compact vers une fonction holomorphe. L'unicité de la limite force cette fonction à être la restriction de f à F_p. Donc f est holomorphe sur F_p, donc sur un ouvert contenu dans D, ce qui conclut ! □

4 Compacité faible et théorie spectrale

La puissance de la compacité réside en particulier dans ses propriétés d'existence de points d'accumulations. En dimension finie ; la quête de la compacité est ramenée à la quête des fermés bornés, plutôt simple à mener. En dimension infinie, cette quête est bien plus compliquée : même la boule unité n'est pas compacte ! Une autre notion s'impose alors : la compacité faible. Nous nous placerons ici dans le cas plus commode des espaces de Hilbert, mais beaucoup de ces résultats se généralisent aux espaces de Banach.

On fixe donc H un espace de Hilbert.

4.1 Convergence faible

Définition 38. *On dit que $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ converge faiblement vers x si pour tout $y \in H$,*

$$\langle x_n, y\rangle \longrightarrow \langle x, y\rangle$$

On note alors $x_n \rightharpoonup x$.

Propriété 39. *Si $x_n \rightharpoonup x$, alors (x_n) est bornée.*

Démonstration. On applique le théorème de Banach-Steinhaus aux formes linéaires induites par les (x_n). □

On trouve alors un résultat de compacité très utile :

Théorème 40 (Théorème de Banach-Alaoglu). *Soit (x_n) une suite bornée. Alors elle admet une sous-suite qui converge faiblement.*

Démonstration. On se ramène facilement au cas séparable en considérant l'espace engendré par les x_n. On fait donc converger avec la propriété précédente et une extraction diagonale une sous-suite contre une famille dénombrable dense. Une fois ceci fait, on montre que notre sous-suite ainsi construite converge faiblement car elle vérifie un critère de Cauchy. □

Ce résultat, tout à fait remarquable, permet de démontrer le prochain résultat, pas moins remarquable :

Propriété 41. *Soit $J : H \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue coercive et convexe. Alors elle atteint son minimum.*

Démonstration. On fait converger une suite minimisante faiblement, on montre que sa limite faible convient grâce au théorème de projection sur un convexe fermé. □

Remarque 42. *Ce résultat illustre très bien l'intérêt de la convergence faible.*

Une application pratique de ce dernier résultat aux équations aux dérivées partielles est le suivant, où l'optimisation convexe compense les non-applications de Lax-Milgram :

Propriété 43. *Soit* $f \in L^2(0;1), p > 0$. *Alors l'équation*

$$u'' + u|u|^{p-1} = f$$

admet une unique solution faible dans H^0.

4.2 Théorie spectrale et opérateurs compacts

Dans cette partie, nous restons dans le domaine de l'analyse fonctionnelle en nous intéressant aux opérateurs compacts. Certaines propriétés seront Hilbertiennes, d'autres Banachiennes ; dans cette partie E désignera donc un Banach, H un Hilbert.

Définition 44. *On note* $\mathcal{L}(E)$ *la* $\mathbb{C}$*-algèbre des opérateurs continus de* E. *C'est un Banach muni de la norme subordonnée à celle de* E. *Soit alors* $T \in \mathcal{L}(E), \lambda \in \mathbb{C}$.

1. *On dit que* λ *est valeur propre de* T, *noté* $\lambda \in \mathrm{vp}(T)$, *si* $\lambda I - T$ *n'est pas injectif.*
2. *On dit que* λ *est valeur spectrale de* T, *noté* $\lambda \in \sigma(T)$ *si* $\lambda I - T$ *n'est pas inversible.*

Remarque 45. *L'inversibilité est prise dans* $\mathcal{L}(E)$. *Néanmoins, d'après le théorème d'isomorphisme de Banach, c'est équivalent à être bijectif.*

Exemple 46. *On se place sur* $\ell^2(\mathbb{N})$, *on considère l'opérateur de translation à droite* $S : (u_0, u_1....) \longrightarrow (0, u_0...)$ *et l'opérateur de translation à gauche* $T : (u_0, u_1...) \longrightarrow (u_1, u_2, ..)$. *Alors :*

1. $\sigma(T) = \overline{\mathbb{D}}, \mathrm{vp}(T) = \mathbb{D}$
2. $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}, \mathrm{vp}(S) = \emptyset$

où $\mathbb{D}$ *désigne le disque unité.*

Propriété 47. *Si* $T \in \mathcal{L}(E)$, *alors :*

1. $\mathrm{vp}(T) \subset \sigma(T)$,
2. $\sigma(T)$ *est compact, et de plus* $\sigma(T) \subset \overline{\mathrm{B}(0, ||T||)}$

On définit maintenant les opérateurs compacts.

Définition 48. *Un opérateur* $T \in \mathcal{L}(E)$ *est dit compact si l'image de la boule unité de* E *par* T *est relativement compacte. On note alors* $T \in \mathcal{K}(E)$.

Exemple 49. *Tout opérateur de rang fini est compact.*

Exemple 50. *Soit* $K : [0;1]^2 \longrightarrow \mathbb{C}$ *une application continue. Alors l'opérateur* $T_K : L^2[0;1] \longrightarrow L^2[0;1]$ *défini par :*

$$T_K(f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

est compact.

Démonstration. C'est une application du théorème d'Ascoli. □

Propriété 51. $\mathcal{K}(E)$ *est un sous espace vectoriel fermé de* $\mathcal{L}(E)$ *; ainsi qu'un idéal bilatère.*

Remarque 52. *On en déduit du caractère fermé que toute limite d'opérateurs de rang fini est compact. Mazur, en 1936 se demande dans le "Cahier Ecossais"*[1] *si tout opérateur compact est limite d'une suite d'opérateurs de rang fini. C'est vrai dans les espaces de Hilbert ; pour les séparables on s'en sort avec une base hilbertienne, pour le reste, c'est plus dur, en particulier dans les* L^p*. Malgré ses recherches, Mazur n'arrive pas à trouver de contre exemple ou de preuve dans un Banach quelconque, et propose alors une oie vivante à quiconque arrive à démontrer ou réfuter ce résultat. C'est en 1972 que P. Enflo trouve un contre exemple ; et repart d'un séminaire à Varsovie avec une oie vivante.*

Propriété 53. $T \in \mathcal{L}(E)$ *est compact si et seulement si pour toute suite bornée* (x_n), $T(x_n)$ *admet au moins une valeur d'adhérence.*

Arrive maintenant un très puissant résultat : l'alternative de Fredholm.

Propriété 54. *Soit* T *un opérateur compact. Alors :*

1. $\dim\ker(I - T) < +\infty$,
2. $\mathrm{Im}(I - T)$ *est fermé dans* E,
3. $I - T$ *est injectif si et seulement si il est inversible.*

On en déduit en particulier :

Propriété 55. *Si* T *est un opérateur compact, alors :*

1. *Les sous espaces propres de* T *sont de dimension finie,*
2. $\mathrm{vp}(T) = \sigma(T)$.

Cette dernière propriété est loin d'être évidente, en témoigne l'exemple des opérateurs de shift.

Terminons l'étude général des opérateurs compacts par ce résultat :

Propriété 56. *Si* E *est de dimension infinie,* T *compact :*

1. $0 \in \sigma(T)$,
2. $\mathrm{vp}(T)/\left\{0\right\} = \sigma(T)/\left\{0\right\}$,
3. 0 *est le seul point d'accumulation de* $\sigma(T)$*, s'il en existe un.*

En d'autre mots, la troisième propriété revient à dire : le spectre de T se réalise comme une suite décroissante de limite nulle, ou est fini.

Faisons une excursion dans les espaces de Hilbert.

1. (livre tirant son nom du café écossais, café de la ville de Lwow (en Pologne), où se retrouvaient quelques mathématiciens dont les noms risquent d'être familiers au lecteur : Banach, Fréchet, Steinhaus, von Neumann, Ulam..., ils y écrivaient des conjectures, des défis avec des récompenses, des ébauches de démonstration, et laissaient la garde du cahier au gérant du café, qui laissait les visiteurs curieux le parcourir)

4.3 Cas des Hilbert

Certaines propriétés vues plus haut se raffinent. En particulier, on a vu :

Propriété 57. *Tout opérateur compact sur H est limite d'opérateurs de rang fini.*

Mais le principal intérêt des espaces de Hilbert est l'étude des opérateurs compacts auto-adjoints, omniprésents en mécanique quantique.

Commencons par définir l'opérateur adjoint :

Définition 58. *Soit $T \in \mathcal{L}(H)$, alors il existe un unique $T^* \in \mathcal{L}(H)$ tel que pour tout $(x, y) \in H$, $\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$. Si $T^* = T$, on dit que T est auto-adjoint.*

Exemple 59. *L'opérateur adjoint de T_K est $T_{\overline{K^*}}$, où $\overline{K^*}(x, y) = \overline{K(y, x)}$.*

Et maintenant, le résultat essentiel de cette partie, le théorème spectral pour les opérateurs compacts :

Théorème 60 (Théorème spectral hilbertien)**.** *Soit $T \in \mathcal{K}(H)$, auto-adjoint. alors $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ et H admet une base hilbertienne de vecteurs propres de T.*

Ceci achève l'étude de la théorie spectrale des opérateurs compacts.

5 Application aux probabilités

De manière assez surprenante, la compacité a d'importantes applications en probabilités.

En effet, c'est le résultat suivant qui repose étroitement sur des notions de compacité :

Propriété 61. *Soit (μ_n) une suite de probabilités sur $\mathbb{R}$, ϕ_n les fonctions caractéristiques associées. On suppose qu'il existe ϕ continue en 0 telles que (ϕ_n) converge simplement vers ϕ. Alors ϕ est la fonction caractéristique d'une probabilité μ, et (μ_n) converge étroitement vers μ.*

Nous allons donner les grandes étapes de la démonstration, précisant au passage certains termes utilisés.

Définition 62. *Soit (μ_n) et μ des probabilités sur $\mathbb{R}^n$, on dit que μ_n converge étroitement vers μ si :*

$$\forall \phi \in C_b^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}), \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d\mu_n(x) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x) d\mu(x)$$

Définition 63. *Soit (μ_n) une suite de probabilités sur $\mathbb{R}^n$. On dit qu'elle est tendue si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n(K) \geq 1 - \varepsilon.$$

Heuristiquement, cela signifie que la masse de toutes les probabilités reste dans un compact à ε près.

Et on a alors le critère de compacité suivant ; dit de Prokhorov :

Propriété 64. *Soit (μ_n) une suite tendue de probabilités sur $\mathbb{R}$. Alors il existe une extraction de cette suite qui converge étroitement.*

Ce théorème repose sur le théorème suivant, dit de Helly :

Propriété 65. *Soit (F_n) une suite de fonctions de répartition, alors il existe (α_n) une extraction et une fonction $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0;1]$ croissante et continue à droite ; tel qu'en tout point de continuité de F on ait $F_n(x) \longrightarrow F(x)$.*

Démonstration. La preuve est technique, bien qu'élémentaire, et repose sur une extraction diagonale, une inversion généralisée, puis des jeux d'écritures avec des limites supérieures et inférieures. □

On en déduit la preuve du théorème de Prokhorov :

Démonstration. Soit F la fonction obtenue grâce au théorème de Helly. On veut montrer que c'est une fonction de répartition, cela permettra de conclure grâce à la caractérisation de la convergence étroite par les fonctions de répartition : (X_n) converge en loi vers (X) si et seulement si il y a convergence simple des fonctions de répartitions en chaque point de continuité. Grâce à l'inverse généralisé, il suffit d'étudier les limites en $\pm\infty$. Soit $\varepsilon > 0$, par hypothèse, il existe $M > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_n([-M, M]) \geq 1 - \varepsilon$. On peut supposer que M est point de continuité de F, car les discontinuités de F sont au plus dénombrables, donc de mesure nulle. En passant à la limite suivant l'extraction obtenue dans le théorème d'Helly, on a :

$$F(M) - F(-M) \geq 1 - \varepsilon.$$

Compte tenu de la monotonie de F, on a bien les limites voulues, et on conclut. □

On en déduit au passage le corrolaire suivant :

Propriété 66. *Si (μ_n) est tendue et admet une unique valeur d'adhérence pour la convergence étroite, alors elle converge étroitement.*

Maintenant, nous sommes armés pour montrer le théorème de Lévy.

Démonstration. Il suffit, d'après ce qui précède, de montrer que la suite (μ_n) est tendue. En effet : cette suite admet une unique valeur d'adhérence puisqu'une valeur d'adhérence admet nécessairement ϕ comme fonction caractéristique, et que cette dernière caractérise la loi. Le corrolaire précédent permettra alors de conclure. La démonstration de la tension de la suite relève alors du théorème de Fubini, et de la trigonométrie élémentaire. □

Remarque 67. *La continuité en 0 est cruciale. Et cette hypothèse se comprend : la tension signifie qu'à ε près on reste dans un compact, ce qui évite la perte de masse à l'infini. La masse totale d'une mesure finie étant égale à l'évaluation en zéro de sa fonction caractéristique, on peut comprendre l'hypothèse de continuité.*

Remarque 68. *On peut déduire du théorème de Lévy le théorème central limite sur $\mathbb{R}$.*

Remarque 69. *La convergence étroite est métrisable !*

6 Questions possibles

1. Soit f localement bornée sur X compact, montrer que f est bornée.

   Démonstration. En tout point on a un voisinage ouvert sur lequel f est bornée par M_x. On peut donc extraire un recouvrement fini de ce recouvrement, et le plus grand des M_x est un majorant de $|f|$. □

2. Peut-on trouver une fonction continue $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ non limite uniforme de polynômes ?

   Démonstration. Non ; toute limite uniforme de polynômes sur $\mathbb{R}$ est polynomiale. Pour ça, on dit que la norme infinie des $P_n - f$ tend vers 0, donc par inégalité triangulaire, à partir d'un certain rang on a $||P_n - P_q||_\infty \leq 1$. Dès lors, c'est un polynôme borné, donc constant ; donc $P_n = P_q + \lambda_n$ pour $n \geq q$. On montrer que λ_n est bornée, on la fait converger par Bolzano Weierstrass, et notre limite est bien un polynôme. □

3. Soit $f : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^1 t^n f(t)dt = 0$, montrer que f est nulle.

   Démonstration. On approche f uniformément par une suite de polynômes (P_n) (théorème de Weierstrass), par linéarité on a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\displaystyle\int_0^1 P_n(t)f(t)dt = 0$. On intègre sur un compact, $P_n f$ converge uniformément vers f^2. On peut donc intervertir limite et intégrale. Dès lors, l'intégrale de f^2 est nulle, f^2 est continue positive d'intégrale nulle donc nulle, donc $f = 0$. □

4. Montrer que la boule unité des polynômes pour la norme infinie sur $[0; 1]$ n'est pas compacte, sans théorème de Riesz.

   Démonstration. Si c'était le cas, une suite extraite de la suite des monômes convergerait vers un polynôme P uniformément sur $[0; 1]$, on aurait $P(1) = 0$ et $P([0; 1[) = 0$, ce qui est improbable... □

5. Montrer que l'intersection d'une suite décroissante de compacts non vides est un compact non vide ; en déduire le théorème de Dini.

   Démonstration. Le caractère compact est immédiat, c'est le caractère non vide qui coûte un peu plus cher. On prend, pour tout $n \in \mathbb{N}, x_n \in K_n$. On peut voir (x_n) comme une suite de $K_0^{\mathbb{N}}$ par décroissance, et donc elle admet une valeur d'adhérence x. Soit φ une extractrice associée. Montrons que x est dans K_p pour tout $p \geq 0$. Soit $p \geq 0$, alors $(x_{\varphi(p+n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de K_p car $\varphi(n) \geq n \ \forall n \in \mathbb{N}$ (récurrence...) et elle converge vers x. K_p étant fermé, on a bien $x \in K_p$. Déduisons en le théorème de Dini. Soit (f_n) une suite décroissante de fonctions continues sur un compact X convergeant vers f continue sur X simplement. On prend $\varepsilon > 0$, on pose $K_n = \{x \in X, (f_n(x) - f(x)) \geq \varepsilon\}$. (f_n) converge uniformément si et seulement si $K_n = \emptyset$ pour n grand (il suffit de l'écrire). On suppose que ce n'est pas le cas, alors (K_n) est une suite de compacts non vides décroissante. Soit alors par le résultat précédent $x \in \cap_n K_n$, alors $\forall n \in \mathbb{N}, (f_n(x) - f(x)) \geq \varepsilon$, ce qui contredit la convergence simple car à la limite nous avons $0 \geq \varepsilon$. $\square$

6. Montrer qu'une fonction holomorphe non nulle a un nombre fini de zéros sur un compact.

Démonstration. On suppose qu'il y en a une infinité, on se donne une suite de zéros distincts, elle admet une valeur d'adhérence, ça contredit le principe des zéros isolés. $\square$

7. Montrer que si $f : X \longrightarrow X$ est C^0 sur un compact, que :

$$x, y \in X, x \neq y \implies d(f(x), f(y)) < d(x, y)$$

, alors f admet un unique point fixe.

Démonstration. L'unicité marche comme d'habitude. Pour l'existence on regarde l'application $f : x \mapsto d(x, f(x))$. Alors f est continue sur un compact, elle est minorée et atteint son min. disons qu'il est atteint en c, si $c \neq f(c), d(f(c), f^2(c)) < d(c, f(c))$, absurde, donc c est un point fixe de f. $\square$

8. Soit (f_n) une suite de fonctions de $(C^0[0,1], \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$, dérivables sur $(0; 1)$, dont la suite des dérivées est bornée dans L^2, alors (f_n) admet une sous-suite qui converge uniformément.

Démonstration. C'est pas simple... C'est Ascoli ! Pour montrer l'équicontinuité, on écrit $f(x) - f(y)$ comme une intégrale, les dérivées étant L^2, on utilise Cauchy Schwarz, qui donne l'équicontinuité. La même méthode donne le caractère équiborné. $\square$