Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Donner un équivalent du reste d'une série de Riemann dans le cas convergent.

Exercice 2

Etudier la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \dfrac{|sin(n)|}{n^2}$ 2. $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$ 3.$u_n = \dfrac{(n+1)^a - n^a}{n^b}$ 4.$u_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

5. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt{ln(n)}}$

Exercice 3 - Transormation d'Abel

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta)$.

1. Montrer que (S_n) est bornée.
2. Soit $N > 2$. Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{\sin(k\theta)}{k} = \sum_{k=1}^{N-1} \frac{S_k}{k(k+1)} + \frac{S_N}{N}$.
3. En déduire la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{sin(k\theta)}{k}$.

Exercice 4

Trouver un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k!$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 5

1. Soit (u_n) une suite de réels positifs. On suppose que $u_n = o(\frac{1}{n})$. Peut on conclure que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge ?
2. Réciproquement, on suppose que $\sum_{n\geq 1} u_n$ converge. A-t-on nécessairement $u_n = o(\frac{1}{n})$?
3. Trouver une condition pour que ce soit le cas.

Exercice 6 - Critère de condensation de Cauchy

Soit (u_n) décroissante positive. Montrer que les séries $\sum_{n\geq 0} u_n$ et $\sum_{n\geq 0} 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1 - Exercice planche CCINP

1. On considère la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ où $n \geqslant 2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.
   (a) **Cas** $\alpha \leqslant 0$
   En utilisant une minoration très simple de u_n, démontrer que la série diverge.
   (b) **Cas** $\alpha > 0$
   Étudier la nature de la série.
   Indication : On pourra utiliser la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x(\ln x)^\alpha}$.
2. Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 3} \frac{\left(\mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{\left(\ln(n^2+n)\right)^2}$.

Exercice 2

Etudier la nature de la série de terme général u_n :

1. $u_n = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}\right)^n$
2. $u_n = n^{\frac{1}{n^2}-1}$
3. $u_n = \dfrac{(\ln(n))^n}{n!}$
4. $u_n = (-1)^n\dfrac{n}{(n+1)^2}$
5. $u_n = \dfrac{1}{n(\ln(n))^2}$

Exercice 3

Trouver un équivalent simple de $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{\sqrt{k}}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4

Déterminer la nature de la série $\sum \sin(\pi(\sqrt{n^2+1}))$.

Exercice 5

Déterminer la nature de la série $\sum f(\frac{1}{n})$ où f est une fonction C^2 sur $[0;1]$

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1 - Exercice CCINP

1. Rappeler précisement l'énoncé du théorème de sommation des équivalents et le démontrer.
2. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{(i-1)\sin\left(\frac{1}{n}\right)}{(\sqrt{n+3}-1)\ln n}$.

   (i est ici le nombre complexe de carré égal à -1)

Exercice 2

Les questions sont indépendantes

1. Déterminer la nature des séries de termes généraux : $u_n = \dfrac{|\cos(n)|}{n^2}$, $v_n = \dfrac{2n}{n^3+1}$ et $w_n = \left(ch\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{n^2}}$.
2. Soit $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente à termes positifs. Quelle est la nature de $\displaystyle\sum_{n\geq 0} u_n^2$?

Exercice 3

Trouver un équivalent simple de $R_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \sqrt{k}2^{-k}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 4

Soit $u_0 > 0$, (a_n) une suite de réels positifs et $u_{n+1} = u_n + \frac{a_n}{u_n}$. Montrer que (u_n) converge si et seulement si $\sum a_n$ converge.

Exercice 5

Les questions sont indépendantes

1. Soit $a > 0$. Nature de la somme des a^{H_n} où (H_n) désigne la série harmonique ?
2. Nature de la somme des $n^{-tan(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n})}$?