Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit u inversible, admettant un polynôme minimal. Montrer que son inverse est un polynôme en u. Contre exemple dans le cas contraire ?

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $\varphi_A : M \mapsto AM$.

1. Justifier que c'est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$
2. Si $P \in \mathbb{C}[X]$, calculer $P(\varphi_A)$.
3. Donner une CNS pour que φ_A soit diagonalisable.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A + I_n$.

1. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?
2. Que dire de son polynôme minimal ?
3. Montrer que $\det(A) > 0$.

Exercice 4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $(I_n, ..., A^{n-1})$ est libre. Montrer que $\operatorname{tr}(A) = 0$.

Exercice 5

Soit $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes vérifiant

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^p = 0$$

pour tout $p > 0$. On souhaite prouver que tous les a_i sont nuls. On note D la matrice diagonale dont les coefficients sont $a_1, \ldots, a_n$.

1. Quelle est la trace de D^p, pour $p \geq 1$?
2. En utilisant le théorème de Cayley-Hamilton, prouver que l'un des a_i est nul.
3. Conclure.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Déterminer, en justifiant, le polynôme minimal de A.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $(X-1)^2$ et en déduire la valeur de A^n.

Exercice 2

Soit E un $\mathbb{K}$-ev, f et g deux endomorphismes tels que : $f \circ g - g \circ f = I_d$.

1. Que dire de la dimension ?
2. Montrer que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $f \circ P(g) - P(g) \circ f = P'(g)$.
3. Montrer que la famille $(g^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est libre.
4. Donner un exemple dans $\mathbb{K}[X]$.

Exercice 3

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que : A est diagonalisable si et seulement si A^q est diagonalisable et $\ker(A^q) = \ker(A)$.

Exercice 4

On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Tr}(\mathrm{A}^\mathrm{k}) = \mathrm{Tr}(\mathrm{B}^\mathrm{k})$. Montrons que $\chi_A = \chi_B$.

1. Traduire l'hypothèse en une hypothèse sur les valeurs propres de A et B.
2. Montrer que A et B ont les mêmes valeurs propres, puis la même multiplicité algébrique. On pensera à l'interpolation de Lagrange.

Ce résultat se généralise au cas où la propriété est supposée vraie pour $1 \leq k \leq n$ seulement. Néanmoins, c'est beaucoup plus dur.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $A^3 + A^2 + A = 0$.

1. Etudier la diagonalisabilité sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.
2. Montrer que $\mathrm{rg}(A)$ est pair.
3. Donner un exemple dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On pourra s'inspirer d'un autre exercice...
4. Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $A^3 + A^2 + A = 0$, a-t-on $\mathrm{rg}(A)$ pair ?

Exercice 2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que : A est diagonalisable si et seulement si A^q est diagonalisable et $\ker(A^q) = \ker(A)$.

Exercice 3

On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

1. Démontrer que $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ (PQ)(u) = P(u) \circ Q(u)$.
2. (a) Démontrer que $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X],\ P(u) \circ Q(u) = Q(u) \circ P(u)$.
   (b) Démontrer que $\forall (P,Q) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$: (P annulateur de u) $\Longrightarrow$ (PQ annulateur de u)
3. Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Écrire le polynôme caractéristique de A. En déduire que le polynôme $R = X^4 + 2X^3 + X^2 - 4X$ est annulateur de A.

Exercice 4

Soit A un matrice réelle. Montrer que son polynôme minimal est le même dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Exercice 5

Soit A, B et M dans ${}_n(\mathbb{C})$ telles que $AM = MB$ où $M \neq 0$.

1. Comparer $P(A)M$ et $MP(B)$ où $P \in \mathbb{C}[X]$.
2. Montrer que A et B ont une valeur propre commune.
3. Montrer la réciproque : si A et B ont une valeur propre commune, alors il existe $M \neq 0$ telle que $AM = MB$.