*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*

## Exercice 1

Montrer que la norme 1 est bien une norme sur $C([0;1],\mathbb{R})$. La comparer à la norme infinie.

## Exercice 2

Sur $E = \mathbb{R}[X]$, on pose pour $P \in E$, $||P||_\infty = \sup\limits_{x\in[0;1]} |P(x)|$, et $||P|| = \sup\limits_{x\in[0;1]} |P'(x) - P(x)|$. Montrer rapidement qu'il s'agit bien de deux normes. Calculer les normes de $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$, puis de $Q_n = X^n$. Conclusion ?

## Exercice 3 Chacun sa boule

Soit $N_1$ et $N_2$ deux normes sur $E$, $B_1 = \{x \in E, N_1(x) < 1\}$ et $B_2 = \{x \in E, N_2(x) < 1\}$. On suppose que $B_1 = B_2$. Montrer que $N_1 = N_2$.

## Exercice 4 Quand la boule est convexe

Soit $N : E \longrightarrow \mathbb{R}+$ vérifiant :

1. Si $x \in E, x \neq 0, N(x) > 0$,
2. $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}, N(\lambda x) = |\lambda| N(x)$,
3. $B = \{x \in E, N(x) \leq 1\}$ est convexe.

Montrer qu'alors $N$ est une norme.

*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*

**Exercice 1**

Soient $N_1$ et $N_2$ deux normes sur un EVN $E$. Montrer que $\max(N_1, N_2)$ définit une norme sur $E$.

**Exercice 2**

Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $M_n(\mathbb{R})$, c'est à dire que toute matrice réelle est limite d'une suite de matrices inversibles.
Indication : pour toute matrice $M$ non inversible, on pourra considérer $M_k = M + \frac{1}{k} I_n$ où $k \in \mathbb{N}^*$

**Exercice 3**

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A \subset \mathbb{R}$ pour que $\sup_{x\in A}(|P(x)|)$ définisse une norme. Et sur $\mathbb{R}_n[X]$ ?

**Exercice 4**

Existe-t-il une norme....

1. Sur $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ telle que :$\forall f \in E, ||f^2|| = ||f||^2$ ?
2. Sur $E = \mathcal{C}^0([0;1], \mathbb{R})$ telle que :$\forall f, g \in E^2, ||fg|| = ||f||||g||$ ?
3. Sur $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in E, ||M^2|| = ||M||^2$ ?
4. (5/2 seulement) Sur $E = \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall M \in E, ||M^2|| = ||M||^2$ ?
5. Soit $X$ un ensemble fini, chercher les normes sur $E = \mathbb{R}^X$ telle que $\forall f \in E, ||f^2|| = ||f||^2$. Et s'il n'en reste qu'une, je serai celle-là !

*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*

### Exercice 1

Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On définit $N(A) = n \max |a_{i,j}|$. Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $E$, et qu'il s'agit d'une norme d'algèbre, i.e que $N(AB) \leq N(A)N(B)$.

### Exercice 2

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \ N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Démontrer que $N$ et $N'$ sont deux normes sur $E$.
2. Démontrer que $N$ et $N'$ sont équivalentes.
3. Sont-elles équivalentes à $\|\cdot\|_\infty$ ?

### Exercice 3

Soit $I = [a; b]$ un segment, $E = C(I, \mathbb{R})$, $f \in E$. On pose alors, pour $u \in E$ $||u|| = ||fu||_\infty$.

1. A quelle condition $||\cdot||$ est elle une norme sur $E$ ?
2. A quelle condition est elle équivalente à la norme infinie ?

### Exercice 4 J'irai où tu iras

Soit $P \in E = \mathbb{R}[X]$, de degré $d$. On pose $Q_k = X^k$ si $k \leq d$, $Q_k = X^k - P$ sinon.

1. Montrer que $(Q_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une base de $E$.
2. Pour $Q = \sum a_k Q_k$, on pose $||Q|| = \max \left\{ \frac{|a_k|}{2^k}, k \geq 0 \right\}$. Montrer que c'est bien une norme.
3. Etudier la convergence de $(X^n)$ pour cette norme.