Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Sur $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$, étudier la continuité de $f \longrightarrow f'$. On regardera de près $f_n : x \mapsto exp(nx)$. Faire une remarque pertinente !

Exercice 2

Etudier la continuité de :

1. $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_1) \to (E, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.
2. $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}$, $F = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)|dt$ et $T : (E, \|.\|_2) \to (F, \|.\|_1),\ f \mapsto fg$ où $g \in E$ est fixé.

Exercice 3

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. Que dire du rayon de $\sum b_n z^n$ si :

1. $b_n = |a_n|$
2. $b_n = \frac{1}{2^n} a_n$
3. $b_n = \frac{a_n}{n!}$
4. $b_n = a_{n+1}$
5. $b_n = \cos(n)$

Exercice 4

On suppose que le rayon R de $\sum a_n z^n$ est non nul. Montrer alors :

$$\exists A > 0, B > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq AB^n,$$

et dans le cas où $a_0 = 1$, montrer :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq C^n.$$

Exercice 5

On note $A_n = \{P \in \mathbb{N}[X], P(2) = n\}$.

1. Montrer que A_n est fini. On note u_n son cardinal.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}$.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_{2n} = u_{2n-1} + u_n$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
5. Montrer que $u_{2^n} \leq n + 1 + 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$
6. Déterminer R, où R est le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1 CCINP

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur le corps $\mathbb{R}$.
1. Démontrer que si f est une application linéaire de E dans F, alors les propriétés suivantes sont deux à deux équivalentes :
P1. f est continue sur E.
P2. f est continue en 0_E.
P3. $\exists k > 0$ tel que : $\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq k\|x\|_E$.
2. Soit E l'espace vectoriel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ muni de la norme définie par : $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. On considère l'application ϕ de E dans $\mathbb{R}$ définie par : $\phi(f) = \int_0^1 f(t)\,dt$. Démontrer que ϕ est linéaire et continue.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $A \subset \mathbb{R}$ pour que $\sup_{x\in A}(|P(x)|)$ définisse une norme. Et sur $\mathbb{R}_n[X]$?
Soit $l : P \longrightarrow P(0)$ sur $\mathbb{R}[X]$. Donner une condition suffisante pour que l soit continue pour la norme donnée précédemment.

Exercice 3

Les questions sont indépendantes.

1. Que savez-vous du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ?
2. Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé. Que dire du rayon si $(a_n r^n)$:
   (a) est bornée
   (b) non bornée
   (c) tend vers 0
   (d) converge
   (e) diverge
   (f) possède une suite extraite bornée
   (g) possède une suite extraite non bornée
   (h) tend vers une limite L non nulle
3. Soit $(a_n), (b_n)$ des suites, R_a et R_b les rayons de convergence associée. On pose $c_n = a_n$ si n pair, b_n si n impair. Que dire du rayon de c_n ?

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Déterminer si l'application linéaire $T : (E, N_1) \to (F, N_2)$ est continue dans les cas suivants :

1. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\| \sum_{k\geq 0} a_k X^k \| = \sum_{k\geq 0} |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
2. $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de $\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \| = \sum_{k=0}^{n} |a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.
3. $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\| \sum_{k\geq 0} a_k X^k \| = \sum_{k\geq 0} k!|a_k|$ et $T : (E, \|.\|) \to (E, \|.\|)$, $P \mapsto P'$.

Exercice 2

Soit $E = \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R})$. On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \; N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty.$$

1. Démontrer que N et N' sont deux normes sur E.
2. Démontrer que N et N' sont équivalentes.
3. Etudier la continuité de $f \longrightarrow f(\frac{1}{2})$ définie sur E muni de la norme N.

Exercice 3CCINP

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice 4

On note $A_n = \{P \in \mathbb{N}[X], P(2) = n\}$.

1. Montrer que A_n est fini. On note u_n son cardinal.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}$.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_{2n} = u_{2n-1} + u_n$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
5. Montrer que $u_{2^n} \leq n + 1 + 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$
6. Déterminer R, où R est le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.