Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon R. Que dire du rayon de $\sum b_n z^n$ si :

1. $b_n = |a_n|$
2. $b_n = \frac{1}{2^n} a_n$
3. $b_n = \frac{a_n}{n!}$
4. $b_n = a_{n+1}$
5. $b_n = \cos(n)$

Exercice 2

1. Déterminer le rayon de convergence de $\sum \frac{x^n}{(2n)!}$. On pose $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$.
2. Déterminer le développement en série entière en 0 de $x \mapsto ch(x)$ et préciser son rayon de convergence.
3. Déterminer $S(x)$.
4. Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0) = 1, f(x) = ch(\sqrt{x})$ si $x > 0$ et $f(x) = cos(\sqrt{-x})$ si $x < 0$.
   Montrer que f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

On suppose que le rayon R de $\sum a_n z^n$ est non nul. Montrer alors :

$$\exists A > 0, B > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq AB^n,$$

et dans le cas où $a_0 = 1$, montrer :

$$\exists C > 0, \forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq C^n.$$

Exercice 4

Soit n un entier, D_n le nombre de dérangements de S_n, c'est à dire le nombre de permutations sans points fixes.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$
2. En déduire le rayon de convergence de $\sum c_n x^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{D_{n-k}}{(n-k)!}$.
3. En déduire la valeur de D_n.
4. n élèves vont à l'école en cheval. L'alarme incendie sonne, ils partent alors hâtivement, et prennent un cheval au hasard. Quelle est laprobabilité qu'aucun élève n'ait son propre cheval ? Vers quoi tend-elle quand n tend vers l'infini ?

Exercice 5

Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients positifs convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 6

Soit (a_n) une suite de réels définissant une série entière $f(z) = \sum a_n z_n$ de rayon de convergence 1. On suppose f admet une limite L en 1. On suppose de plus que $a_n = o(\frac{1}{n})$. On veut montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ existe et vaut L.

1. Le montrer dans le cas où les a_n sont positifs.
2. Le montrer dans le cas général. On regardera $f(1-\frac{1}{n}) - S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Exercice 7

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon R_a, et $0 < r < R_a$.

1. Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt = a_n r^n$.
2. En déduire que si f est entière (c'est à dire que $R_a = +\infty$) et bornée, alors elle est constante.
3. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f(re^{it}))|^2 dt$$
4. En déduire que si f admet un maximum local en zéro, alors elle est constante.
5. On suppose $R_a \geq 1$, les (a_n) dans $\mathbb{Z}$, et f bornée sur $D(0;1)$. Montrer que f est polynomiale.

Exercice 8

Soit $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Chercher le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \sum a_n x^n$.

On pose alors $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$.

1. Montrer que $a_n = I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une formule explicite pour f.

Exercice 9

On note $A_n = \{P \in \mathbb{N}[X], P(2) = n\}$.

1. Montrer que A_n est fini. On note u_n son cardinal.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}$.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_{2n} = u_{2n-1} + u_n$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
5. Montrer que $u_{2^n} \leq n + 1 + 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$
6. Déterminer R, où R est le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Les questions sont indépendantes.

1. Que savez-vous du rayon de convergence de la somme de deux séries entières ?
2. Soit $r \in \mathbb{R}$ fixé. Que dire du rayon si $(a_n r^n)$:
   (a) est bornée
   (b) non bornée
   (c) tend vers 0
   (d) converge
   (e) diverge
   (f) possède une suite extraite bornée
   (g) possède une suite extraite non bornée
   (h) tend vers une limite L non nulle
3. Soit $(a_n), (b_n)$ des suites, R_a et R_b les rayons de convergence associée. On pose $c_n = a_n$ si n pair, b_n si n impair. Que dire du rayon de c_n ?

Exercice 2

Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \binom{2n}{n} \frac{1}{2n-1} x^n$

1. Donner le rayon de convergence de $f(x)$.
2. Montrer que $2f = (1+4x)f'$, puis en déduire f.

Exercice 3

Soit n un entier, D_n le nombre de dérangements de S_n, c'est à dire le nombre de permutations sans points fixes.

1. Montrer que $n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$
2. En déduire le rayon de convergence de $\sum c_n x^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \frac{D_{n-k}}{(n-k)!}$.
3. En déduire la valeur de D_n.
4. n élèves vont à l'école en cheval. L'alarme incendie sonne, ils partent alors hâtivement, et prennent un cheval au hasard. Quelle est laprobabilité qu'aucun élève n'ait son propre cheval ? Vers quoi tend-elle quand n tend vers l'infini ?

Exercice 4

Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients positifs convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 5

Soit (a_n) une suite de réels définissant une série entière $f(z) = \sum a_n z_n$ de rayon de convergence 1. On suppose f admet une limite L en 1. On suppose de plus que $a_n = o(\frac{1}{n})$. On veut montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ existe et vaut L.

1. Le montrer dans le cas où les a_n sont positifs.
2. Le montrer dans le cas général. On regardera $f(1-\frac{1}{n}) - S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Exercice 6

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon R_a, et $0 < r < R_a$.

1. Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt = a_n r^n$.
2. En déduire que si f est entière (c'est à dire que $R_a = +\infty$) et bornée, alors elle est constante.
3. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f(re^{it}))|^2 dt$$
4. En déduire que si f admet un maximum local en zéro, alors elle est constante.
5. On suppose $R_a \geq 1$, les (a_n) dans $\mathbb{Z}$, et f bornée sur $D(0;1)$. Montrer que f est polynomiale.

Exercice 7

Soit $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Chercher le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \sum a_n x^n$.

On pose alors $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$.

1. Montrer que $a_n = I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une formule explicite pour f.

Exercice 8

On note $A_n = \{P \in \mathbb{N}[X], P(2) = n\}$.

1. Montrer que A_n est fini. On note u_n son cardinal.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}$.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_{2n} = u_{2n-1} + u_n$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
5. Montrer que $u_{2^n} \leq n + 1 + 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$
6. Déterminer R, où R est le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1CCINP

1. Donner la définition du rayon de convergence d'une série entière de la variable complexe.
2. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée telle que la série $\sum a_n$ diverge.
   Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$? Justifier.
3. Quel est le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \left(\sqrt{n}\right)^{(-1)^n} \ln\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$?

Exercice 2

1. Étudier la convergence et la continuité de la somme de $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{x^n}{n(n-1)}$.
2. calculer la valeur de la somme $S(x)$, puis calculer $S(1)$ et $S(-1)$.

Exercice 3

Soit n un entier, D_n le nombre de dérangements de S_n, c'est à dire le nombre de permutations sans points fixes.

1. Montrer que $\displaystyle n! = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} D_{n-k}$
2. En déduire le rayon de convergence de $\sum c_n x^n$ où $\displaystyle c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\frac{D_{n-k}}{(n-k)!}$.
3. En déduire la valeur de D_n.
4. n élèves vont à l'école en cheval. L'alarme incendie sonne, ils partent alors hâtivement, et prennent un cheval au hasard. Quelle est laprobabilité qu'aucun élève n'ait son propre cheval ? Vers quoi tend-elle quand n tend vers l'infini ?

Exercice 4

Soit (P_n) une suite de polynômes à coefficients positifs convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 5

Soit (a_n) une suite de réels définissant une série entière $f(z) = \sum a_n z_n$ de rayon de convergence 1. On suppose f admet une limite L en 1. On suppose de plus que $a_n = o(\frac{1}{n})$. On veut montrer que $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ existe et vaut L.

1. Le montrer dans le cas où les a_n sont positifs.
2. Le montrer dans le cas général. On regardera $f(1-\frac{1}{n}) - S_n$ où $S_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

Exercice 6

Soit $f(z) = \sum a_n z^n$ une série entière de rayon R_a, et $0 < r < R_a$.

1. Montrer que $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}dt = a_n r^n$.
2. En déduire que si f est entière (c'est à dire que $R_a = +\infty$) et bornée, alors elle est constante.
3. Montrer que
$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |(f(re^{it}))|^2 dt$$
4. En déduire que si f admet un maximum local en zéro, alors elle est constante.
5. On suppose $R_a \geq 1$, les (a_n) dans $\mathbb{Z}$, et f bornée sur $D(0;1)$. Montrer que f est polynomiale.

Exercice 7

Soit $a_n = \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$.

1. Chercher le rayon de convergence de la série entière $f(x) = \sum a_n x^n$.

On pose alors $I_n = \int_0^1 t^n(1-t)^n dt$.

1. Montrer que $a_n = I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire une formule explicite pour f.

Exercice 8

On note $A_n = \{P \in \mathbb{N}[X], P(2) = n\}$.

1. Montrer que A_n est fini. On note u_n son cardinal.
2. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} = u_{2n}$.
3. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}, n \geq 1, u_{2n} = u_{2n-1} + u_n$.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{2n} = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
5. Montrer que $u_{2^n} \leq n + 1 + 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$
6. Déterminer R, où R est le rayon de convergence de $\sum u_n x^n$.