Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $M \in GL_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'on peut écrire $M = QR$ où Q est orthogonale, R triangulaire supérieure. *On utilisera des matrices de passage.*

Exercice 2

Soit $E = C([0;1], \mathbb{R})$ muni de $\langle f|g\rangle = \int_0^1 fg$. Soit F le sous espace des fonctions nulles en 0. Déterminer $F^\perp$. Commentaire ?

Exercice 3

Soit H un préhilibertien. On dit qu'une suite (x_n) de H converge faiblement vers x dès que $\forall y \in H, \langle x_n|y\rangle \longrightarrow \langle x|y\rangle$. On note $x_n \rightharpoonup x$.

1. Montrer l'unicité de la limite pour la convergence faible.
2. Montrer que la convergence forte entraîne la convergence faible.
3. Montrer l'équivalence entre :
   — (x_n) converge fortement vers x
   — (x_n) converge faiblement vers x et $||x_n|| \longrightarrow ||x||$.
4. Montrer qu'en dimension finie, ces deux convergences sont équivalentes.
5. Montrer que ce n'est pas le cas en dimension quelconque.
6. Soit (v_n) bornée. On suppose que $v_n \rightharpoonup v$, $w_n \longrightarrow w$. Montrer que $\langle v_n|w_n\rangle \longrightarrow \langle v|w\rangle$.

On sait montrer que toute suite convergeant faiblement est bornée, mais ça nécessite des outils au delà du programme de MP. Les notions de convergence faible sont très utilisées en optimisation, ou résolution des EDP.

Exercice 4

Soit ω une fonction continue et strictement positive sur I, où I désigne un intervalle borné. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_I P(t)Q(t)\omega(t)dt$.

1. Montrer que c'est bien un produit scalaire.
2. Justifier l'existence d'une base orthonormée (P_n) de $\mathbb{R}[X]$, telle que P_k soit de norme 1, de degré k, et où $(X^k|P_k) > 0$.
3. Justifier que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a au moins un zéro dans I.
5. Montrer que P_n est scindé à racines simples, et que ses racines sont dans l'intérieur de I.
6. Montrer que P_n vérifie une relation de récurrence de la forme $P_{n+1} = \alpha_n X P_n + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}$, où $\alpha_n > 0$ et $\gamma_n < 0$.
7. Montrer que si $n \geq 2$, les zéros de P_{n-1} séparent ceux de P_n.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

On note $PZ(O(E)) = \{v \in L(E), \forall u \in O(E), uv = vu\}$. On fixe $u \in PZ(O(E))$, D une droite.

1. En considérant la réflexion orthogonale d'hyperplan $D^\perp$, montrer que u fixe D.
2. En déduire $u = \lambda I_d$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $Z(O(E)) = \{I_d, -I_d\}$ où $Z(O(E))$ désigne le centre du groupe $O(E)$.

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ muni de $\langle P|Q\rangle = \sum p_i q_i$, F l'espace des polynômes nuls en 1. Montrer que $F^\perp = \{0\}$. Commentaire ?

Exercice 3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n.
On pose $\forall (A, B) \in E^2$, $\langle A\,, B\rangle = \mathrm{tr}({}^t\!AB)$ où tr désigne la trace et ${}^t\!A$ désigne la transposée de la matrice A.

1. Prouver que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur E.
2. On note $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble matrices symétriques de E et $A_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices antisymétriques de E.
   (a) Prouver que $E = S_n(\mathbb{R}) \oplus A_n(\mathbb{R})$.
   (b) Prouver que $S_n(\mathbb{R}) = A_n(\mathbb{R})^\perp$.
3. Soit F l'ensemble des matrices diagonales de E.
   Déterminer $F^\perp$.

Exercice 4

Soit ω une fonction continue et strictement positive sur I, où I désigne un intervalle borné. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_I P(t)Q(t)\omega(t)dt$.

1. Montrer que c'est bien un produit scalaire.
2. Justifier l'existence d'une base orthonormée (P_n) de $\mathbb{R}[X]$, telle que P_k soit de norme 1, de degré k, et où $(X^k|P_k) > 0$.
3. Justifier que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a au moins un zéro dans I.
5. Montrer que P_n est scindé à racines simples, et que ses racines sont dans l'intérieur de I.
6. Montrer que P_n vérifie une relation de récurrence de la forme $P_{n+1} = \alpha_n X P_n + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}$, où $\alpha_n > 0$ et $\gamma_n < 0$.
7. Montrer que si $n \geq 2$, les zéros de P_{n-1} séparent ceux de P_n.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit E euclidien de dimension n, B une base orthonormée de E, $x_1, ..., x_n$ des vecteurs de E. Montrer que $|[x_1, ...x_n]| = |\det_B(x_1, ..., x_n)| \leq \prod_{i=1}^n ||x_i||$. *On utilisera des matrices de passage.*

Exercice 2

Soit $E = \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que $(P|Q) = \int_0^1 PQ$ définit un produit scalaire sur E.
2. Déterminer a et b minimisant la quantité $\int_0^1 (t^2 - at - b)^2 dt$.

Exercice 3

$E = \mathbb{R}_n[X]$. $a_0, \cdots a_n$ des réels. On définit $(P|Q) = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$.

1. A quelle condition est-ce un produit scalaire ?
2. $F = \{P \in E, \sum_{k=0}^n P(a\alpha_k) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$.
3. Déterminer la distance de X^n à F.

Exercice 4

E un préhilibertien, $A \subset E$. On considère la propriété (P) suivante : $\forall e \in E, \exists m \in \mathbb{R}, \forall a \in a, |\langle e|a \rangle| \leq m$.

1. Montrer que si A est bornée, A vérifie (P).
2. Montrer que si E est de dimension finie, que A vérifie P, alors A est bornée.
3. Trouver dans $\mathbb{R}[X]$ une partie non bornée vérifiant P. Pas simple ; regarder les polynômes dont les coefficients sont inclus dans $[0; 1]$...

Exercice 5

Soit ω une fonction continue et strictement positive sur I, où I désigne un intervalle borné. On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $(P|Q) = \int_I P(t)Q(t)\omega(t)dt$.

1. Montrer que c'est bien un produit scalaire.
2. Justifier l'existence d'une base orthonormée (P_n) de $\mathbb{R}[X]$, telle que P_k soit de norme 1, de degré k, et où $(X^k|P_k) > 0$.
3. Justifier que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. Montrer, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n a au moins un zéro dans I.
5. Montrer que P_n est scindé à racines simples, et que ses racines sont dans l'intérieur de I.
6. Montrer que P_n vérifie une relation de récurrence de la forme $P_{n+1} = \alpha_n X P_n + \beta_n P_n + \gamma_n P_{n-1}$, où $\alpha_n > 0$ et $\gamma_n < 0$.
7. Montrer que si $n \geq 2$, les zéros de P_{n-1} séparent ceux de P_n.