Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit (X_k) une suite de variables aléatoires iid suivant une loi de Bernoulli de paramètre p.On note $L_1 = \sup\{k \geq 1, X_1 = X_2 ... = X_k\}$ et $L_2 = \sup\{k \geq 1, X_{L_1+1} = X_{L_1+2} ... = X_{L_1+k}\}$. Montrer que L_1 est finie presque sûrement, puis donner son espérance. Même question avec L_2.

Exercice 2

Soit (X_n) une suite de variables iid à valeurs dans $\mathbb{N}$, N à valeurs dans $\mathbb{N}$, on suppose que toutes les variables aléatoires introduites sont indépendantes. On pose $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On pose $S = S_N$.

1. Montrer que S est une variable aléatoire.
2. Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.
3. Montrer que $E(S) = E(N)E(X)$.
4. Interprétation ?

Exercice 3

Soit $X_1, ...X_n$ n variables aléatoires i.i.d suivant une loi de Poisson de paramètre λ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Calculer $E(exp(s.S_n))$ pour $s \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\epsilon > 0$. Montrer l'existence de $C > 0$ indépendant de n tel que : $P(Sn \geq (n(\lambda + \epsilon))) \leq e^{-Cn}$.
3. Montrer l'existence de $C > 0$ indépendant de n tel que $P(|\frac{S_n}{n} - \lambda| > \epsilon) \leq 2e^{-Cn}$.

Exercice 4

Soit $n \geq 2$; on choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n ; soit p un diviseur de n et A_p l'événement : le nombre choisi est divisible par p

1. Calculer $P(A_p)$.
2. Montrer que si p_1, ..., p_r sont les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, ...A_{p_r}$sont mutuellement indépendants.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $Y_n = X_n + X_{n+1}$, $T_n = \sum_{k=1}^n Y_k$ et $Z_n = \frac{1}{n} T_n$

1. Donner la loi de Y_n, son espérance, et sa variance.
2. Calculer $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.
3. Calculer l'espérance et la variance de Z_n.
4. Pour $\epsilon > 0$, calculer $\lim_n P(|Z_n - 2p| < \epsilon)$.
5. Y_p et Y_q sont elles indépendantes ?

.

Exercice 2

On note A_n l'ensemble des multiples de n et p_n la suite croissante des nombres premiers. On fixe $s > 1$, et on dit que X suit la loi zêta de paramètre s si pour $n > 0, P(X = n) = \frac{1}{\zeta(s)n^s}$.

1. Justifier qu'il s'agit bien d'une loi de probabilité.
2. Trouver son espérance et sa variance.
3. Calculer $P(X \in A_n)$ pour $n \geq 1$.
4. Montrer que les événements $(X \in A_p)$ sont indépendants où $p \in \mathcal{P}$.
5. En déduire que $P(X = 1) = \lim_n \prod_{k=1}^{n} (1 - \frac{1}{p_k^s})$
6. Montrer que $\zeta(s) = \prod_{p \in \mathcal{P}} (1 - \frac{1}{p})^{-1}$.
7. Montrer que $\sum \frac{1}{p_n}$ diverge.

Exercice 3

Soit (X_n) une suite de variables iid à valeurs dans $\mathbb{N}$, N à valeurs dans $\mathbb{N}$, on suppose que toutes les variables aléatoires introduites sont indépendantes. On pose $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. On pose $S = S_N$.

1. Montrer que S est une variable aléatoire.
2. Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.
3. Montrer que $E(S) = E(N)E(X)$.
4. Interprétation ?

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires i.i.d suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On note $Y_i = X_i X_{i+1}$.

1. Donner la loi de Y_i
2. Calculer $\mathrm{cov}(Y_i, Y_{i+k})$.
3. Si $T_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$ et $S_n = \frac{1}{n} T_n$; montrer que pour tout $\epsilon > 0$, $P(|S_n - p^2| > \epsilon^2) \longrightarrow 0$.

Exercice 2

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes valant ± 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

1. Montrer que $ch(t) \leq exp(\frac{t^2}{2})$.
2. Calculer $E(e^{tS_n})$ pour $t \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que $P(|\frac{S_n}{n}| \geq R) \leq 2exp(-\frac{1}{2}nR^2)$
4. Comparer à Bienaymé Tchebychev.

Exercice 3

Soit (X_n) une suite de variables iid à valeurs dans $\mathbb{N}$, N à valeurs dans $\mathbb{N}$, on suppose que toutes les variables aléatoires introduites sont indépendantes. On pose $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$. On pose $S = S_N$.

1. Montrer que S est une variable aléatoire.
2. Montrer que $G_S = G_N \circ G_X$.
3. Montrer que $E(S) = E(N)E(X)$.
4. Interprétation ?