Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer que l'image d'un fermé de $\mathbb{C}$ par un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ est fermée. Commentaire ? *On dit alors que les polynômes sont des applications fermées. On peut aussi montrer que l'image d'un ouvert est un ouvert. Néanmoins, c'est plus difficile. On retrouverait alors le théorème de d'Alembert-Gauss.*

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel normé. Soit A une partie non vide de E. On note $\overline{A}$ l'adhérence de A.

1. Donner la caractérisation séquentielle de $\overline{A}$.
2. Prouver que, si A est convexe, alors $\overline{A}$ est convexe.
3. Plus difficile : Même question pour l'intérieur.

Exercice 3

Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un fermé d'intérieur vide.

Exercice 4

Existe-t-il une norme sur $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ telle que si (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, alors $||f_n|| \longrightarrow 0$? En d'autre mots : existe-t-il une norme induisant la convergence simple sur E ?

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et $F = \{f \in E;\ f(0) = 0\}$.

1. On munit E de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. Démontrer que F est fermé dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.
2. On munit E de la norme $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|dx$. Démontrer que F est dense dans $(E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 2

Soit U et V deux ouverts denses d'un EVN E. Montrer que $U \cap V$ est un ouvert dense.

Exercice 3

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

Exercice 4

Montrer que l'ensemble des projecteurs de $M_n(\mathbb{R})$ est un fermé non borné d'intérieur vide. En donner les points isolés.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est d'intérieur non vide. Démontrer que $F = E$.

Exercice 2

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense. Un pronostic pour son intérieur ? Et son adhérence si on remplace $\mathbb{C}$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 3

Montrer que si $A_k \longrightarrow A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors à partir d'un certain rang, $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(A_k)$. En déduire que les matrices de rang inférieur à r forment un fermé. En déduire l'adhérence de $\mathcal{J}_r$, où $\mathcal{J}_r$ désigne les matrices de rang r. Est-ce un fermé ? Un ouvert ?

Exercice 4

Existe-t-il une norme sur $E = \mathcal{C}([0;1], \mathbb{R})$ telle que si (f_n) converge simplement vers la fonction nulle, alors $||f_n|| \longrightarrow 0$? En d'autre mots : existe-t-il une norme induisant la convergence simple sur E ?