Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Justifier que l'intersection d'une suite décroissante de compacts non vides est un compact non vide. *Application à venir...*

Exercice 2

On se donne f_n une suite croissante de fonctions continues sur un compact A convergeant simplement vers une fonction continue f. Justifier que la convergence est uniforme. On se donnera un $\epsilon > 0$ et on utilisera $K_n = \{x \in A, f(x) - f_n(x) \geq \epsilon\}$. C'est le théorème de Dini.

Exercice 3

Montrer que l'ensemble des matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est un fermé d'intérieur vide. Montrer qu'une matrice est nilpotente si et seulement si 0 adhère à sa classe de similitude.

Exercice 4

Montrer que si $A_k \longrightarrow A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, alors à partir d'un certain rang, $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(A_k)$. En déduire que les matrices de rang inférieur à r forment un fermé. En déduire l'adhérence de $\mathcal{J}_r$, où $\mathcal{J}_r$ désigne les matrices de rang r. Est-ce un fermé ? Un ouvert ?

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit f continue sur un compact K, et bijective. Montrer que sa réciproque est continue.

Exercice 2

$(\mathbb{R} - \mathbb{Q})^2$ et $\mathbb{R}^2 - \mathbb{Q}^2$ sont ils connexes par arcs ?

Exercice 3

Soit E un espace vectoriel de dimension finie, A fermé non vide de E, b un élément quelconque de E. Justifier que la distance de b à A est atteinte.

Exercice 4

On note $\mathcal{P}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des projecteurs de $M_n(\mathbb{K})$ où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Est-ce un fermé ? Un compact ? En donner les points isolés, le nombre de composantes connexes par arcs, et son intérieur.

Exercice 5

Soit U et V deux ouverts denses d'un EVN E. Montrer que $U \cap V$ est un ouvert dense.

Exercice 6

Montrer que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est diagonalisable si et seulement si sa classe de similitude est fermée.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

f est une fonction continue sur $[a;b] \subset \mathbb{R}$ telle que $f(a)f(b) < 0$.
On considère l'application définie sur $D = \{(x;y) \in [a;b]^2, x < y\}$ par $F(x;y) = f(y) - f(x)$

1. Justifier que D est connexe par arcs.
2. En déduire que si f est injective alors f est monotone.

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel normé, F un fermé de E, et K un compact de E. Montrer que $F + K$ est fermé dans E.

Exercice 3

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est dense. Un pronostic pour son intérieur ?
Soit $T_n(\mathbb{R})$ les matrices trigonalisables à coefficients réels. Montrer qu'on peut les trigonaliser en base orthonormée. En déduire l'adhérence de $D_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices diagonalisables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Soit E un espace vectoriel normé et F un sous-espace vectoriel de E. On suppose que F est d'intérieur non vide. Démontrer que $F = E$.