Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Valeurs propres, vecteurs propres et spectre d'une matrice : définition. Caractérisation par le déterminant en dimension finie.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E tel que tout vecteur de E non nul est vecteur propre de u. Que dire de u ?
2. Soit M de rang 1 dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que M est semblable soit à $tE_{1,1}$ pour un $t \in \mathbb{R}$ que l'on explicitera, soit à $E_{1,2}$.

Exercice 3

Soient p et q deux projecteurs d'un K espace vectoriel E.
On suppose que $p+q$ est un projecteur. Démontrer que :

1. $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. $\mathrm{Im}p \cap \mathrm{Im}q = \{0\}$.
3. $\mathrm{Ker}(p+q) = \mathrm{Ker}p \cap \mathrm{Ker}\, q$.
4. $\mathrm{Im}(p+q) = \mathrm{Im}p + \mathrm{Im}q$.

Exercice 4

Montrer que deux matrices réelles semblables sur $\mathbb{C}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $(f;g) \in L(E,F)^2$.

Démontrer que : $rg(f+g) = rg(f) + rg(g) \Leftrightarrow \begin{cases} Imf \cap Img = \{0\} \\ Kerf + Kerg = E \end{cases}$

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

E désigne un espace vectoriel, u et v des endomorphismes de E.

1. Soit λ une valeur propre non nulle de $u \circ v$. Montrer que λ est valeur propre de $v \circ u$.
2. Montrer que si E est de dimension finie, $u \circ v$ et $v \circ u$ ont le même spectre.
3. Que se passe-t-il en dimension infinie ?

Exercice 2

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in L(E)$. Démontrer les équivalences :

$$E = Im(f) \oplus Ker(f) \Leftrightarrow E = Im(f) + Ker(f) \Leftrightarrow Im(f^2) = Im(f) \Leftrightarrow Ker(f^2) = Ker(f).$$

Exercice 3

Les deux questions sont dépendantes.

1. Soit u un endomorphisme tel que tout vecteur de E non nul soit vecteur propre. Que dire de u ?
2. Soit M une matrice de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice avec des zéros sur la diagonale.

Exercice 4

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = A$. Montrer que $rg(A) = Tr(A)$.

Exercice 5

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et en déduire un polynôme annulateur de A.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB^2 - B^2A = B$. Nous voulons montrer que B est nilpotente. On raisonne par l'absurde, et on suppose qu'elle ne l'est pas.

1. Simplifier $AB^{2k} - B^{2k}A$.
2. Trouver un endomorphisme dont B^{2k-1} est vecteur propre.
3. En déduire que B est nilpotente.
4. Montrer que l'indice de nilpotence de B est impair.

Exercice 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

1. Calculer A^2 et en déduire un polynôme annulateur de A.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

$f \in L(E)$ est dit nilpotent s'il existe $p \in N^*$ tel que $f^p = 0$.
Dans ce cas l'indice de nilpotence de f est le plus petit entier p tel que $f^p = 0$.
Soit E un e.v. de dimension finie et $f \in L(E)$ nilpotent d'indice p.

1. Démontrer qu'il existe $a \in E$ tel que $f^{p-1}(a) \neq 0$.
2. Démontrer que la famille $(f^i(a))_{i=0;\ldots;p-1}$ est libre. En déduire une relation entre p et $\dim E$.

On suppose maintenant que u est nilpotent d'indice n.

1. Montrer que $\dim(\ker(u^k)) = k$.
2. Déterminer les espaces stables par u.
3. En donner une base adaptée.

Exercice 4

Les deux questions sont dépendantes.

1. Soit u un endomorphisme tel que tout vecteur de E non nul soit vecteur propre. Que dire de u ?
2. Soit M une matrice de trace nulle. Montrer que M est semblable à une matrice avec des zéros sur la diagonale.