Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Etudier l'existence, selon α et β, de $\int_2^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha \ln(x)^\beta}$. Donner un résultat analogue pour les séries.

Exercice 2

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2, +\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif. La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0, +\infty[$?

Exercice 3

On pose $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$

1. Déterminer le domaine de définition de β.
2. Montrer que $\beta(u,v) = \beta(v,u)$.
3. Montrer que $\beta(u,v) = \beta(u+1,v) + \beta(u,v+1)$.
4. Déterminer une relation entre $\beta(u,v)$ et $\beta(u+1,v)$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduire la valeur de $\beta(n,v)$. En particulier, l'écrire si $v = p$ est un entier.
5. En calculant $x^n(1-x)^p$ à l'aide du bînome de Newton, trouver une propriété sympathique des coefficients binomiaux.

Exercice 4

Justifier l'existence de $\int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt$. Montrer que l'intégrale n'est néanmoins pas absolument convergente.

Exercice 5

Trouver les x pour lesquels $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{1+t^x}}dt$ converge, puis calculer sa valeur.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1 : Fonction Gamma - à connaître par coeur

On pose : $\forall\, x > 0$ et $\forall\, t > 0,\ f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que, $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0;+\infty[,\ \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.

2. Démontrer que, $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Exercice 2

Les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction f définie sur $I =]0;1]$ par $f(x) = \dfrac{ln(x)}{x^3 + x^2}$ est-elle intégrable sur I ?
2. La fonction g définie sur $I =]0;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{\sqrt{x^3 + x^4}}$ est-elle intégrable sur I ?

Exercice 3

Soit f continue sur $[1,+\infty[$

1. On suppose que $f(x) = o(\frac{1}{x})$. A-t-on $\int_1^{+\infty} f$ converge ?
2. On suppose que l'intégrale converge. A-t-on $f(x) = o(\frac{1}{x})$?
3. Donner une condition pour ce soit le cas.

Exercice 4

On suppose f de classe C^2, tels que $f^2, f \cdot f''$, et f'^2 sont intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} ff'' \leq 0$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Les deux questions sont indépendantes.

1. La fonction f définie sur $I =]-1;1[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^6}}$ est-elle intégrable sur I ?
2. La fonction g définie sur $I =]-\infty;+\infty[$ par $g(x) = \dfrac{1+x^2e^{-x}}{x^2+e^{-2x}}$ est-elle intégrable sur I ?

Exercice 2 : Fonction Gamma - à connaître par coeur

On pose : $\forall\, x > 0$ et $\forall\, t > 0$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer que, $\forall x > 0$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que, $\forall x > 0$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Exercice 3

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+t^3)^n}dt$.

1. Etudier l'existence et calculer I_1.
2. Déterminer une relation de récurrence de $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ pour $n \geq 2$.
3. En déduire la valeur de I_n pour tout $n \geq 2$.

Exercice 4

On pose $\beta(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de β.
2. Montrer que $\beta(u,v) = \beta(v,u)$.
3. Montrer que $\beta(u,v) = \beta(u+1,v) + \beta(u,v+1)$.
4. Déterminer une relation entre $\beta(u,v)$ et $\beta(u+1,v)$ à l'aide d'une intégration par parties. En déduire la valeur de $\beta(n,v)$. En particulier, l'écrire si $v = p$ est un entier.
5. En calculant $x^n(1-x)^p$ à l'aide du binôme de Newton, trouver une propriété sympathique des coefficients binomiaux.