Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1Fonction Gamma

On pose : $\forall\, x \in]0;+\infty[$ et $\forall\, t \in\,]0;+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer proprement que $\forall\, x \in\,]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour n entier strictement positif.
4. Montrer que si x est un réel strictement positif, $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\, dt$.

Exercice 2

Soit f continue sur $J = [0;1]$. Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 f(t)t^n\, dt$, et avec un changement de variable, trouver la limite de nI_n. Peut-on en déduire un équivalent de I_n ?

Exercice 3

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que $f' + f \longrightarrow 0$. Montrer que f tend vers zéro. On pourra utiliser $g : x \mapsto e^x f(x)$, et le cours d'intégration.

Exercice 4

Pour $n \geq 1, x \in [0;1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Montrer que $|f_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)\, dt$.

Exercice 5

Montrer que $f(t) = \frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer son intégrale sous la forme d'une somme.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n \, dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$

Exercice 2

Montrer que $f(t) = \frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer son intégrale sous la forme d'une somme.

Exercice 3

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n} \, dt$ pour ≥ 1. Déterminer $l = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$, puis trouver un équivalent de $l - I_n$.

Exercice 4

Soit $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$. En donner un équivalent.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Déterminer la limite de $n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$.

Exercice 2

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3

Soit f continue sur $J = [0;1]$. Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 f(t)t^n\,dt$, et avec un changement de variable, trouver la limite de nI_n. Peut-on en déduire un équivalent de I_n ?

Exercice 4

1. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1. On suppose que $f' + f \longrightarrow 0$. Montrer que f tend vers zéro. On pourra utiliser $g : x \mapsto e^x f(x)$, et le cours d'intégration.

Exercice 5

Montrer que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt$ converge, mais que $t \longmapsto \frac{\sin(t)}{t}$ n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}_+$.