Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1Fonction Gamma

On pose : $\forall\, x \in]0;+\infty[$ et $\forall\, t \in]0;+\infty[$, $f(x,t) = \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}$.

1. Démontrer proprement que $\forall\, x \in]0,+\infty[$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0;+\infty[$.

   On pose alors, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t$.
2. Démontrer que, $\forall\, x \in]0;+\infty[$, $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour n entier strictement positif.
4. Montrer que si x est un réel strictement positif, $\Gamma(x) = \displaystyle\lim_{n\longrightarrow\infty} \int_0^n (1-\frac{t}{n})^n t^{x-1}\, dt$.

Exercice 2

Soit f continue sur $J = [0;1]$. Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 f(t)t^n\, dt$, et avec un changement de variable, trouver la limite de nI_n. Peut-on en déduire un équivalent de I_n ?

Exercice 3

Pour $n \geq 1, x \in [0;1]$, on pose $f_n(x) = nx(1-x)^n$.

1. Montrer que $|f_n(x)| \leq 1$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f(t)\, dt$.

Exercice 4

Montrer que $f(t) = \frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer son intégrale sous la forme d'une somme.

Exercice 5

Montrer que si u et v des endomorphismes de E un espace de dimension finie commutent, alors les sous espaces propres de l'un sont stables par l'autre. En déduire que si u et v sont diagonalisables et commutent, alors ils sont codiagonalisables (diagonalisables dans une même base).

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer que $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} (1-\frac{x^2}{n})^n \, dx = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \, dx$

Exercice 2

Montrer que $f(t) = \frac{t}{e^t-1}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$, et exprimer son intégrale sous la forme d'une somme.

Exercice 3

On pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^n} \, dt$ pour ≥ 1. Déterminer $l = \lim\limits_{n\to\infty} I_n$, puis trouver un équivalent de $l - I_n$.

Exercice 4

Soit u un endomorphisme de E un espace vectoriel de dimension finie. Soit F stable par u. Que dire du polynôme caractéristique de l'endomorphisme induit par u sur F ? On suppose maintenant u diagonalisable. Que dire des sous espaces stables par u ?

Exercice 5

Que dire de A dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $A^n = I_n$ et $\mathrm{tr}(A) = n$?

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Déterminer la limite de $n\int_1^{+\infty} e^{-x^n}\,dx$.

Exercice 2

Montrer que $\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-1}dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Exercice 3

Soit f continue sur $J=[0;1]$. Déterminer la limite de $I_n = \int_0^1 f(t)t^n\,dt$, et avec un changement de variable, trouver la limite de nI_n. Peut-on en déduire un équivalent de I_n ?

Exercice 4

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 5

Montrer que si u et v commutent, les espaces propres de l'un sont stables par l'autre. Déterminer la dimension du commutant d'un endomorphisme diagonalisable sur un espace vectoriel de dimension finie.

Exercice 6

Soit $a_1,\dots,a_n \in {}^n$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & \dots & \dots & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A. A est appelée matrice compagnon de $P=\sum a_k X^k$, notée $C(P)$. C'est une famille de matrices à connaître, elles vérifient plein de propriétés intéressantes.