



*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*



### Exercice 1

$$\text{Soit } A = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

1.  $A$  est-elle diagonalisable sur  $\mathbb{C}$ ? Sur  $\mathbb{R}$ ?
2. Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A^n$ .

### Exercice 2

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

### Exercice 3

Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes qui commutent sur  $E$  un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel. Montrer qu'ils sont trigonalisables dans une même base.

### Exercice 4

Soit  $E = \mathbb{R}_n[X]$  et soit  $\phi$  l'endomorphisme de  $E$  défini par  $\phi(P) = P - (X + 1)P'$ . Justifier que  $\phi$  est diagonalisable et donner les valeurs propres de  $\phi$ .



*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*



### Exercice 1

Soit  $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $A$  est diagonalisable et diagonaliser  $A$ .
2. Montrer que  $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} A^k$  converge.

### Exercice 2

Soit  $f$  et  $g$  deux endomorphismes d'un espace vectoriel  $E$ , tel que  $f$  soit diagonalisable. Montrer que  $f$  et  $g$  commutent si et seulement si les sous espaces propres de  $f$  sont stables par  $g$ .

### Exercice 3

On considère la matrice  $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ .

1. Montrer que  $A$  n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice  $A$  est-elle inversible? Est-elle diagonalisable?
3. Montrer que  $(A - I)^2 = 0$ .
4. Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Calculer  $A^n$ .

### Exercice 4

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

### Exercice 5

Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes qui commutent sur  $E$  un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel. Montrer qu'ils sont trigonalisables dans une même base.



*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*

---



### Exercice 1

Pour  $n \geq 1$ , soit

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et  $P_n(x) = \det(xI_n - A_n)$  son polynôme caractéristique.

1. Démontrer que pour tout  $n \geq 2$ , on a

$$P_n(x) = xP_{n-1}(x) - P_{n-2}(x).$$

Calculer  $P_1$  et  $P_2$ .

2. Pour tout  $x \in ]-2, 2[$ , on pose  $x = 2 \cos \alpha$  avec  $\alpha \in ]0, \pi[$ . Démontrer que

$$P_n(x) = \frac{\sin((n+1)\alpha)}{\sin \alpha}.$$

3. En déduire que  $A_n$  est diagonalisable.

### Exercice 2

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

### Exercice 3

Soit  $u$  et  $v$  deux endomorphismes qui commutent sur  $E$  un  $\mathbb{C}$  espace vectoriel. Montrer qu'ils sont trigonalisables dans une même base.