Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. A est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Sur $\mathbb{R}$?
2. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} A^n$.

Exercice 2

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 3

Soit u et v deux endomorphismes qui commutent sur E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. Montrer qu'ils sont trigonalisables dans une même base.

Exercice 4

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et soit ϕ l'endomorphisme de E défini par $\phi(P) = P - (X+1)P'$. Justifier que ϕ est diagonalisable et donner les valeurs propres de ϕ.

Exercice 5

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes, et soient A, J les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que J est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.
2. Déterminer un polynôme Q tel que $A = Q(J)$.
3. En déduire le déterminant de A.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est diagonalisable et diagonaliser A.
2. Montrer que $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$ converge.

Exercice 2

Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E, tel que f soit diagonalisable. Montrer que f et g commutent si et seulement si les sous espaces propres de f sont stables par g.

Exercice 3

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A n'admet qu'une seule valeur propre que l'on déterminera.
2. La matrice A est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?
3. Montrer que $(A - I)^2 = 0$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer A^n.

Exercice 4

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 5

Soit u et v deux endomorphismes qui commutent sur E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. Montrer qu'ils sont trigonalisables dans une même base.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $a_1, \dots, a_n \in {}^n$ et

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & a_n \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & a_2 \\ 0 & \dots & \dots & 1 & a_1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique de A. En déduire que un corps est algébriquement clos si et seulement si tout matrice a une valeur propre dans .

Exercice 2

Soit L l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $L(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Démontrer que L est un endomorphisme diagonalisable de $\mathbb{R}_n[X]$, déterminer ses valeurs propres et une base de vecteurs propres associés.

Exercice 3

Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'une matrice de rang 1 soit diagonalisable.

Exercice 4

Soit u et v deux endomorphismes qui commutent sur E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel. Montrer qu'ils sont trigonalisables dans une même base.

Exercice 5

Soient $a_0, \dots, a_{n-1}$ des nombres complexes, et soient A, J les matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ définies par

$$A = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_1 \\ a_1 & \dots & a_{n-1} & a_0 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Démontrer que J est diagonalisable et calculer ses valeurs propres.
2. Déterminer un polynôme Q tel que $A = Q(J)$.
3. En déduire le déterminant de A.