Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

1. Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   (c) Soit $a > 0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;+\infty[$?
   (d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Exercice 2

Soit (f_n) et (g_n) des suites de fonctions $X \longrightarrow \mathbb{C}$ convergeant uniformément vers f et g. On suppose de plus qu'elles sont bornées. Montrer que (f_ng_n) converge uniformément vers fg

Exercice 3

$\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n\left(x\right) = \dfrac{e^{-x}}{1+n^2x^2}$ et $u_n = \displaystyle\int_0^1 f_n\left(x\right)dx$.

1. Étudier la convergence simple, uniforme sur des parties, et uniforme sur $[0,1]$ de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
2. Étudier la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 4 : Pas simple, mais très formateur

1. Soit (f_n) une suite de fonction $K-$lipschitzienne sur un segment S convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme.
2. En déduire que si (f_n) est une suite de fonctions convexes sur un intervalle $]a,b[$. Montrer que la convergence est uniforme sur tout sous-segment.

Exercice 5 : Pas simple

Soit (f_n) C^2 sur un segment S. On suppose de plus que :

1. f_n converge simplement vers une fonction f,
2. Qu'il existe $M > 0$, $\forall n \geq 0$, $||f''||_\infty \leq M$

Montrer que f est dérivable, que (f_n') converge uniformément vers f', et que (f_n) converge uniformément vers f.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que,
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$. Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Exercice 2

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 3 : Pas simple, mais très formateur

1. Soit (f_n) une suite de fonction $K-$lipschitzienne sur un segment S convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme.
2. En déduire que si (f_n) est une suite de fonctions convexes sur un intervalle $]a, b[$. Montrer que la convergence est uniforme sur tout sous-segment.

Exercice 4 : Pas simple

Soit (f_n) C^2 sur un segment S. On suppose de plus que :

1. f_n converge simplement vers une fonction f,
2. Qu'il existe $M > 0$, $\forall n \geq 0$, $||f''||_\infty \leq M$

Montrer que f est dérivable, que (f'_n) converge uniformément vers f', et que (f_n) converge uniformément vers f.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

1. Soit (g_n) une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$, X désignant un ensemble non vide quelconque.
   On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, g_n est bornée et que la suite (g_n) converge uniformément sur X vers g.
   Démontrer que la fonction g est bornée.
2. On considère la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & \text{si} \quad |x| \leqslant \frac{1}{n} \\ \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$
   Prouver que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. La convergence est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

Exercice 2

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Etudier la convergence simple de f_n, et la convergence uniforme. Que piensas ?

Exercice 3 : Pas simple, mais très formateur

1. Soit (f_n) une suite de fonction $K-$lipschitzienne sur un segment S convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme.
2. En déduire que si (f_n) est une suite de fonctions convexes sur un intervalle $]a, b[$. Montrer que la convergence est uniforme sur tout sous-segment.

Exercice 4 : Pas simple

Soit (f_n) C^2 sur un segment S. On suppose de plus que :

1. f_n converge simplement vers une fonction f,
2. Qu'il existe $M > 0$, $\forall n \geq 0$, $||f''||_\infty \leq M$

Montrer que f est dérivable, que (f_n') converge uniformément vers f', et que (f_n) converge uniformément vers f.