Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

1. Soit X un ensemble, $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{C}$ et g une fonction de X dans $\mathbb{C}$. Donner la définition de la convergence uniforme sur X de la suite de fonctions (g_n) vers la fonction g.
2. On pose $f_n(x) = \dfrac{n+2}{n+1}\mathrm{e}^{-nx^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[0,+\infty[$?
   (c) Soit $a>0$. La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $[a;+\infty[$?
   (d) La suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle uniformément sur $]0,+\infty[$?

Exercice 2

Soit (f_n) et (g_n) des suites de fonctions $X \longrightarrow \mathbb{C}$ convergeant uniformément vers f et g. On suppose de plus qu'elles sont bornées. Montrer que (f_ng_n) converge uniformément vers fg

Exercice 3

On considère, pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = \dfrac{x}{1+n^4x^4}$.

1. (a) Prouver que $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$. On pose alors $\forall x\in\mathbb{R},\ f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$.
   (b) Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ avec $0<a<b$. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f_n$ converge-t-elle normalement sur $[a,b]$? sur $[a,+\infty[$? sur $[0,+\infty[$?
2. Prouver que f est continue sur $\mathbb{R}^*$.
3. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 4 : Pas simple, mais très formateur

1. Soit (f_n) une suite de fonction $K-$lipschitzienne sur un segment S convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme.
2. En déduire que si (f_n) est une suite de fonctions convexes sur un intervalle $]a,b[$. Montrer que la convergence est uniforme sur tout sous-segment.

Exercice 5

Soit $(I_j)_{j\in J}$ une familles d'intervalles non triviaux disjoints de $\mathbb{R}$. Montrer que J est au plus dénombrable.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

1. Soit (f_n) une suite de fonctions de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$.
   On suppose que la suite de fonctions (f_n) converge uniformément sur $[a, b]$ vers une fonction f, et que,
   $\forall\, n \in \mathbb{N}$, f_n est continue en x_0, avec $x_0 \in [a, b]$. Démontrer que f est continue en x_0.
2. On pose : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $\forall\, x \in [0; 1]$, $g_n(x) = x^n$. La suite de fonctions $(g_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge-t-elle uniformément sur $[0; 1]$?

Exercice 2

Soit $f_n(x) = (-1)^n \dfrac{e^{-nx}}{n + x}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0; +\infty[$.

1. Étudier la convergence de la série $\sum f_n$.
2. Montrer que sa somme est continue sur $[0; +\infty[$.

Exercice 3

1. Soit X une partie de $\mathbb{R}$, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de X dans $\mathbb{R}$ convergeant simplement vers une fonction f.
   On suppose qu'il existe une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de X telle que la suite $(f_n(x_n) - f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ne tende pas vers 0.
   Démontrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas uniformément vers f sur X.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{1 + n^2x^2}$.
   (a) Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Étudier la convergence uniforme de la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur $[a, +\infty[$ (avec $a > 0$), puis sur $]0, +\infty[$.

Exercice 4 : Pas simple, mais très formateur

1. Soit (f_n) une suite de fonction $K-$lipschitzienne sur un segment S convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme.
2. En déduire que si (f_n) est une suite de fonctions convexes sur un intervalle $]a, b[$. Montrer que la convergence est uniforme sur tout sous-segment.

Exercice 5

Montrer que l'ensemble des points de discontinuités d'une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

On pose $\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}$. En donner le domaine de définition, en étudier la monotonie, la continuité, le caractère C^∞, en donner un équivalent/une limite aux bornes de son ensemble de définition, en étudier la convexité, puis faire un beau dessin. On pose alors $\eta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^x}$. En donner le domaine le définition, en étudier la continuité, montrer que $\eta(x) = \zeta(x)(1-2^{1-x})$. Qu'à-t-on fait ? Etudier les limites au bord de l'ensemble de définition de η. Que vaut $\zeta(0)$?

Exercice 2

On pose, pour $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$. Etudier la convergence simple de f_n, et la convergence uniforme. Que piensas ?

Exercice 3 : Pas simple, mais très formateur

1. Soit (f_n) une suite de fonction $K-$lipschitzienne sur un segment S convergeant simplement vers une fonction f. Montrer que la convergence est uniforme.
2. En déduire que si (f_n) est une suite de fonctions convexes sur un intervalle $]a, b[$. Montrer que la convergence est uniforme sur tout sous-segment.

Exercice 4

On note $\mathbb{A}$ l'ensemble des algébriques, c'est à dire des réels annulés par un polynôme non nul à coefficients entiers. Montrer que $\mathbb{A}$ est dénombrable. Qu'en penser ?