Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer, en utilisant le cours sur les familles sommables, que si $z, z' \in \mathbb{C}, e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Exercice 2

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Monter que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} d(n)e^{-n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{e^{-p}}{1-e^{-p}}$

Exercice 3

Étudier $\displaystyle\sum_{(p;q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$ où $\begin{cases} \text{si } p > q, u_{p,q} = 0 \\ \forall p \in \mathbb{N}, u_{p,p} = 1 \\ \text{si } p < q, u_{p,q} = -\dfrac{1}{2^{q-p}} \end{cases}$

Exercice 4

Montrer que l'ensemble des points de discontinuités d'une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.

Exercice 5 : Théorème de Mertens

On suppose que $\sum u_n$ est absolument convergente de somme S, et que (v_n) converge vers L où u et v désignent des suites complexes.
Montrer que $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ tend vers LS. On étudiera le cas où $L = 0$ avant d'en déduire facilement le cas général.
Maintenant, on suppose $\sum u_n$ absolument convergente et $\sum v_n$ convergente, on note U et V leurs sommes.
Montrer que $\sum w_n$ converge et que $\sum w_n = UV$. C'est le théorème de Mertens.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Etudier la sommabilité de la famille $\frac{(-1)^p}{q^p}$ où $p, q \geq 2$.

Exercice 2

Existence et calcul de $\displaystyle\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=1}^{+\infty}\frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.

Indication : On utilisera une décomposition en éléments simples.

Exercice 3

Montrer la sommabilité et calculer la somme de la famille $\forall(p;q) \in \mathbb{N}^2, p \geq 2, q \geq 2, u_{p,q} = \dfrac{1}{p^q}$

Exercice 4 : Théorème de Mertens

On suppose que $\sum u_n$ est absolument convergente de somme S, et que (v_n) converge vers L où u et v désignent des suites complexes.

Montrer que $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ tend vers LS. On étudiera le cas où $L = 0$ avant d'en déduire facilement le cas général.

Maintenant, on suppose $\sum u_n$ absolument convergente et $\sum v_n$ convergente, on note U et V leurs sommes. Montrer que $\sum w_n$ converge et que $\sum w_n = UV$. C'est le théorème de Mertens.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

La famille $u_{p,q} = \dfrac{1}{pq(p+q)}, (p,q) \in \mathbb{N}^*$ est elle sommable ?

Exercice 2

Etudier $\displaystyle\sum_{(p;q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$ où $\begin{cases} \forall q \in \mathbb{N}, u_{0,q} = 1 \\ \forall p \in \mathbb{N}^*, \forall q \in \mathbb{N}, u_{p,q} = -\dfrac{1}{2^p} \end{cases}$

Exercice 3

On note $\mathbb{A}$ l'ensemble des algébriques, c'est à dire des réels annulés par un polynôme non nul à coefficients entiers. Montrer que $\mathbb{A}$ est dénombrable. Qu'en penser ?

Exercice 4 : Théorème de Mertens

On suppose que $\sum u_n$ est absolument convergente de somme S, et que (v_n) converge vers L où u et v désignent des suites complexes.
Montrer que $w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$ tend vers LS. On étudiera le cas où $L = 0$ avant d'en déduire facilement le cas général.
Maintenant, on suppose $\sum u_n$ absolument convergente et $\sum v_n$ convergente, on note U et V leurs sommes. Montrer que $\sum w_n$ converge et que $\sum w_n = UV$. C'est le théorème de Mertens.