Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectives λ et μ. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 2

Soit $r \in \mathbb{N}*, 0 < p < 1$. On répète une suite d'expériences de Bernoulli indépendantes de paramètre p. On définit une variable aléatoire X qui est le nombre d'échecs avant d'arriver à r succès. Déterminer la loi de X.

Exercice 3

On dispose de deux urnes U_1 et U_2. L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes :
- on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie.
- on note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1. Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.
$\forall n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche ». On pose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = P(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35}p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.

Exercice 4

Soit $n \geq 2$; on choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n ; soit p un diviseur de n et A_p l'événement : le nombre choisi est divisible par p

1. Calculer $P(A_p)$.
2. Montrer que si p_1, ..., p_r sont les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, ...A_{p_r}$sont mutuellement indépendants.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$.

Exercice 5

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, positives. Déterminer la probabilité que $\sum X_n$ converge.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit X et Y deux variables aléatoires. On suppose que X suit une loi de Poisson de paramètre λ, et que la loi de Y conditionnée par $(X = n)$ est une loi binomiale de paramètre (n, p). Quelle est la loi de Y ?

Exercice 2

Le nombre de véhicules passant quotidiennement à un péage en direction de la mer est une variable aléatoire X qui suit une loi de Poisson de paramètre λ ; le nombre de véhicules passant quotidiennement à ce même péage en direction du plat pays est une variable aléatoire Y qui suit une loi de Poisson de paramètre μ ; on suppose X et Y indépendantes. Sachant que n véhicules sont passés un jour donné, quelle est la probabilité pour que k soient passés en direction de la mer ? Est-ce une loi connue ?

Exercice 3

On dispose de deux pièces de monnaie : la pièce A amène pile avec une probabilité a et la pièce B avec une probabilité b.
Au départ on choisit au hasard une des deux pièces de façon équiprobable puis on effectue le premier lancer avec cette pièce.
Si on obtient pile on conserve cette pièce pour le lancer suivant, sinon on change de pièce, et ainsi de suite ...
On obtient alors une suite infinie de lancers. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit les événements :
E_n : « on utilise pour la première fois A au n^e lancer » et U_n : « on a obtenu n piles au cours des n premiers lancers ».

1. Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(E_n)$ et $P(U_n)$.
2. Calculer $P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} E_n\right)$ puis $P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} U_n\right)$. Interpréter ces résultats.

Exercice 4

Soit $n \geq 2$; on choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n ; soit p un diviseur de n et A_p l'événement : le nombre choisi est divisible par p

1. Calculer $P(A_p)$.
2. Montrer que si p_1, ..., p_r sont les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, ...A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$.

Exercice 5

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées, positives. Déterminer la probabilité que $\sum X_n$ converge.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $p \in]0,1[$. On pose $q = 1 - p$.
On considère N variables aléatoires $X_1, X_2, \cdots, X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i \in \{1, ..., N\}$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $P(X_i \leqslant n)$, puis $P(X_i > n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y = \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant N}(X_i)$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y > n)$. En déduire $P(Y \leqslant n)$, puis $P(Y = n)$.

Exercice 2

On dit qu'une variable aléatoire est sans mémoire si elle est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et si pour tous $k, n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$P(X > k + n | X > n) = P(X > k).$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$. Montrer que X est sans mémoire.
2. Réciproquement, soit X une variable aléatoire sans mémoire. On pose $q = P(X > 1)$.
   (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $P(X > n) = q^n$.
   (b) En déduire que X suit une loi géométrique de paramètre $p = 1 - q$.

Exercice 3

On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.

1. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6.
   Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
3. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.

Exercice 4

Soit $n \geq 2$; on choisit de manière équiprobable un des entiers compris entre 1 et n ; soit p un diviseur de n et A_p l'événement : le nombre choisi est divisible par p

1. Calculer $P(A_p)$.
2. Montrer que si p_1, ..., p_r sont les diviseurs premiers de n, les événements $A_{p_1}, ...A_{p_r}$sont mutuellement indépendants.
3. En déduire le calcul de $\varphi(n)$.