Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x-1)e^{-3x}dx$.

Exercice 2

Unicité de l'élément neutre et du symétrique dans un groupe. Symétrique de $x * y$. Preuves.

Exercice 3

1. Soit $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que $th(x+y) = \frac{th(x)+th(y)}{1+th(x)th(y)}$.
2. Savez-vous comment retrouver les formules de trigonométrie hyperboliques à partir des formules de trigonométrie circulaires ?
3. Montrer que l'on définit une loi de groupe sur $G =]-1, 1[$ par $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$.
4. Donner un isomorphisme $(\mathbb{R}, +) \longrightarrow (G, *)$

Exercice 4

Vrai ou faux ?

1. Dans tout corps $\mathbb{K}$, $1_{\mathbb{K}} + 1_{\mathbb{K}} \neq 0$.
2. Tout sous corps de $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{Q}$.

Exercice 5 : Anneau des entiers de Gauss

On appelle anneau des entiers de Gauss, noté $\mathbb{Z}[i]$, l'ensemble des complexes de la forme $a + ib$, où a et b sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau.
2. Si z et z' sont dans $\mathbb{Z}[i]$, on note $N(z) = z\bar{z}$. Montrer que $N(z)$ est un entier positif.
3. On dit qu'un entier de Gauss z est inversible si il existe un entier de gauss z' tel que $zz' = 1$. Déterminer les entiers de Gauss inversibles. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un entier est somme de deux carrés si il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 + b^2$.
4. Montrer, en utilisant les entiers de Gauss, que si n et n' sont sommes de deux carrés, alors nn' est somme de deux carrés.
5. Retrouver ce résultat sans utiliser les entiers de Gauss.

Une étude plus poussée des entiers de Gauss permet de les munir d'une division euclidienne, et ces derniers ont plein d'applications en théorie des nombres. En particulier, ils ont permis à Gauss de démontrer, à seulement 18 ans, qu'un nombre est somme de deux carrés si et seulement si ses facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 interviennent avec un exposant pair.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_1^e (\ln(t))^2 dt$.

Exercice 2

1. Montrer que $H \subset (G, \cdot)$ est un groupe si et seulement si :
   (a) $H \neq \emptyset$
   (b) $\forall x, y \in H^2, xy^{-1} \in H$.
2. Montrer que si H_1 et H_2 sont des sous groupes de G, $H_1 \cap H_2$ en est un.
3. Soit G un groupe dont tout les éléments $x \in G$ vérifient $x^2 = e$. Montrer que G est abélien.

Exercice 3

On considère l'ensemble $A = \{x + y\sqrt{3}, (x; y) \in \mathbb{Z}^2\}$.

1. Démontrer que $(A, +, \times)$ est un anneau.
2. Démontrer que $N : \forall(x; y) \in \mathbb{Z}^2, N(x + y\sqrt{3}) = x^2 - 3y^2$ définit une application de A dans $\mathbb{Z}$.
3. Démontrer que $\forall(a; b) \in A^2, N(ab) = N(a)N(b)$.
4. En déduire que : $\forall(x; y) \in \mathbb{Z}, x + y\sqrt{3}$ est inversible dans $A \Leftrightarrow x^2 - 3y^2 \in \{-1; 1\}$.
5. Démontrer que le groupe des inversibles de A est infini.

Exercice 4

Vrai ou faux ?

1. Dans tout corps, $1_\mathbb{K} + 1_\mathbb{K} \neq 0$.
2. Tout sous corps de $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{Q}$.

Exercice 5

On dit qu'un anneau A est intègre si pour tout $x, y \in A, xy = 0 \implies x = 0 \text{ ou } y = 0$. Montrer qu'un anneau fini intègre est un corps. On pourra utiliser $\varphi : A \longrightarrow A, t \longmapsto ta$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (t+2)\sin(t)dt$.

Exercice 2

Définition et propriétés d'un morphisme de groupes : écrivez ce qui vous vient, on rajoutera ce qu'il manque, et on en prouvera certaines.

Exercice 3

1. Soient H et H' deux sous groupes d'un groupe $(G,*)$.
   Démontrer que : $H \cup H'$ est un sous groupe de $(G,*) \Leftrightarrow H \subset H'$ ou $H' \subset H$.
2. Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Montrer que $C(G) = \{x \in G, \forall y \in G, xy = yx\}$ est un sous-groupe de G.

Exercice 4

Soit $\alpha \in \mathbb{Q}_+^*$ tel que $\sqrt{\alpha} \notin \mathbb{Q}$. Démontrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{\alpha}) = \{x + y\sqrt{\alpha}, (x;y) \in \mathbb{Q}^2\}$ est un corps.

Exercice 5

On dit qu'un anneau A est intègre si pour tout $x, y \in A, xy = 0 \implies x = 0$ *ou* $y = 0$. Montrer qu'un anneau fini intègre est un corps. On pourra utiliser $\varphi : A \longrightarrow A, t \longmapsto ta$.

Exercice 6 : Anneau des entiers de Gauss

On appelle anneau des entiers de Gauss, noté $\mathbb{Z}[i]$, l'ensemble des complexes de la forme $a + ib$, où a et b sont des entiers relatifs.

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i]$ est un anneau.
2. Si z et z' sont dans $\mathbb{Z}[i]$, on note $N(z) = z\bar{z}$. Montrer que $N(z)$ est un entier.
3. On dit qu'un entier de Gauss z est inversible si il existe un entier de gauss z' tel que $zz' = 1$. Déterminer les entiers de Gauss inversibles. Soit $n \in \mathbb{N}$. On dit qu'un entier est somme de deux carrés si il existe deux entiers a et b tels que $n = a^2 + b^2$.
4. Montrer, en utilisant les entiers de Gauss, que si n et n' sont sommes de deux carrés, alors nn' est somme de deux carrés.
5. Retrouver ce résultat sans utiliser les entiers de Gauss.

Une étude plus poussée des entiers de Gauss permet de les munir d'une division euclidienne, et ces derniers ont plein d'applications en théorie des nombres. En particulier, ils ont permis à Gauss de démontrer, à seulement 18 ans, qu'un nombre est somme de deux carrés si et seulement si ses facteurs premiers congrus à 3 modulo 4 interviennent avec un exposant pair.