Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt$.

Exercice 2

Résoudre l'équation $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$ d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

Soient $(m;n) \in (\mathbb{N}^*)^2$ déterminer le reste de la division euclidienne de $(X+2)^m + (X-1)^n - 1$ par $(X-1)(X-2)$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4

1. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(X+a) = P(X)$.
2. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{R}$.
3. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$.
4. Déterminer les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$. On pourra utiliser : $Q(X) = X^n\bar{P}(1/X)$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \arctan(x)^2 dx$.

Exercice 2

Résoudre $P'P'' = 4P$ où $P \in \mathbb{R}[X]$.

Exercice 3

Soit (P_n) une suite de polynôme vérifiant $P_0 = X - 2$ et $P_{n+1} = P_n^2 - 2$.

1. Calculer quelques termes de la suite.
2. Montrer que P_n est unitaire pour tout $n \geq 0$. Donner son degré.
3. Calculer son coefficient constant, de degré 1, puis de degré 2.

Exercice 4

Trouver les complexes a, b, c vérifiant $a + b + c = abc = |a| = |b| = |c| = 1$. On commencera par vérifier que $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$, puis que $ab + ac + bc = 1$, puis on cherchera un lien avec le cours sur les polynômes..

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

1. Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{2u}{\sqrt{1+u}}du$.
2. En déduire $\displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt{1+\sqrt{1+t}}}$.

Exercice 2

Soit T_k une suite de polynômes vérifiant $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $T_{k+2} = 2XT_{k+1} - T_k$ pour $k \geq 0$.

1. Calculer T_2, T_3 et T_4.
2. Déterminer le degré de T_n et son coefficient dominant.
3. Etudier sa parité, puis calculer $T_n(1)$, $T_n(0)$ et $T_n(-1)$.
4. Montrer que T_n est l'unique polynôme vérifiant $T_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta)$.

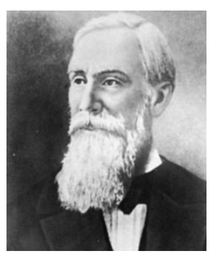

Рис. 1: Pafnouti Lvovitch Tchebychev, aussi connu sous le nom de Пафнутий Львович Чебышёв, mathématicien russe du 19ème siècle.

Exercice 3

Les questions sont indépendantes.

1. Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2+1)P'' - 6P = 0$.
2. Soit P non nul tel que $P(X^2) + P(X)P(X+1) = 0$. Que dire des racines de P ?
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X^n+1)^2$ par $(X+1)^2$.

Exercice 4

Soit $\lambda_1, ...\lambda_n$, $\mu_1, ..., \mu_n$ des complexes. On pose $s_k = \sum_{k=1}^n \lambda_i^k$, $t_k = \sum_{i=1}^n \mu_i^k$. On suppose pour pour tout k, $t_k = s_k$. Montrer que les λ_i et les μ_i sont les mêmes à permutation près.