Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

L'Homme irrationnel de Michel Mendes-France.

Exercice 1

Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\dfrac{e^{\frac{x}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)}{\operatorname{ch}(x)} = \dfrac{e^{2x}+e^x}{e^{2x}+1}$ En déduire $I = \displaystyle\int_0^1 \dfrac{e^{\frac{t}{2}} \operatorname{ch}\left(\frac{t}{2}\right)}{\operatorname{ch}(t)} dt$ en effectuant le changement de variable $u = e^t$.

Exercice 2

Soit A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x;y) \in A \times B, x \leq y$.

1. Montrer que A admet une borne sup et que B admet une borne inf.
2. Montrer que $\sup(A) \leq \inf(B)$.

Exercice 3 : Recherche d'une borne inférieure

On cherche à déterminer la borne inférieure de $A = \left\{ \frac{p}{q} + 2\frac{q}{p}, (p,q) \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Justifier qu'elle existe. On la note a.
2. Dresser le tableau de variations de $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{2}{x}$.
3. Nous allons montrer que $a = 2\sqrt{2}$.
   (a) Justifier que c'est bien un minorant.
   (b) Soit $\epsilon > 0$.
      i. Justifier qu'il existe $x_\epsilon \in]\sqrt{2}, +\infty[$ tel que $f(x_\epsilon) = 2\sqrt{2} + \epsilon$.
      ii. En déduire l'existence d'un rationnel r_ϵ tel que $f(r_\epsilon) < 2\sqrt{2} + \epsilon$.
   (c) Conclure.
4. a est-il le plus petit élément de A?

Exercice 4 : Vers la topologie et la connexité

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est ouverte si A est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire que si $\forall a \in A, \exists I \subset A$, I un intervalle ouvert non trivial, tel que $a \in I$. On dit que $F \subset \mathbb{R}$ est fermée si $A = \mathbb{R}/F$ est ouverte.
Montrer que les parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.
On dit alors que $\mathbb{R}$ est connexe.

Exercice 5 : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Nous allons ici faire l'inventaire des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Soit G un tel sous-groupe, distinct de $\{0\}$.

1. Justifier que $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ existe, et qu'il est soit nul, soit strictement positif. Dans un premier temps, nous supposerons que a est strictement positif.
   (a) Montrer que $a \in G$. On supposera par l'absurde que $a \notin G$, on montrera l'existence de $u, v \in G$, $a < u < v < 2a$, et on regardera $v - u$ (faire un dessin)
   (b) Montrer que $G = a\mathbb{Z}$ (on écrira une division euclidienne).

   On suppose maintenant $a = 0$.
   (a) Soit $x < y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $w \in G, 0 < w < y - x$.
   (b) Montrer qu'alors $x < \lfloor (\frac{x}{w}) \rfloor w < y$.
   (c) Qu'a-t-on montré?
2. En déduire l'inventaire des groupes additifs de $\mathbb{R}$. Donner un exemple pour chaque cas possible. Cette alternative est à connaître absolument, et idéalement la démonstration..

Exercice 6 : Une recherche de point fixe

L'objet de cet exercice est de montrer que si $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ est croissante, alors elle admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $(f(x) = x)$.

1. Rappeler un exercice similaire avec une autre hypothèse que croissante (facultatif, mais important..)
2. On pose $E = \{x \in [0;1], f(x) \leq x\}$. Montrer que E admet une borne inférieure. On la note a.
3. Montrer que $f(a)$ est un minorant de E. En déduire que $f(a) \leq a$.
4. On suppose $a > 0$. Montrer que pour $x \in [0; a[$, $f(x) > x$. En déduire que $f(a) \geq a$.
5. Conclure. Il y a-t-il unicité d'un tel point fixe?
6. Quid d'une fonction décroissante de $[0;1]$ dans lui-même?

Exercice 7

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \cos x}$ en effectuant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. Bien que peu divertissant, ce changement de variable est très utile, et savoir retrouver les expressions de cos sin et tan en fonction de ce dernier est essentiel.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

L'Homme irrationnel de Michel Mendes-France.

Exercice 1

Calculer $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}dt$ en posant $t = \sin\theta$.

Exercice 2

A et B deux parties non vides et majorées de $\mathbb{R}$, et $A + B = \{x + y, (x; y) \in A \times B\}$.

1. Montrer que $A + B$ admet une borne sup.
2. Montrer que $sup(A + B) = sup(A) + sup(B)$.

Exercice 3 : Recherche d'une borne inférieure

On cherche à déterminer la borne inférieure de $A = \left\{\frac{p}{q} + 2\frac{q}{p}, (p, q) \in \mathbb{N}^*\right\}$.

1. Justifier qu'elle existe. On la note a.
2. Dresser le tableau de variations de $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{2}{x}$.
3. Nous allons montrer que $a = 2\sqrt{2}$.
   (a) Justifier que c'est bien un minorant.
   (b) Soit $\epsilon > 0$.
      i. Justifier qu'il existe $x_\epsilon \in]\sqrt{2}, +\infty[$ tel que $f(x_\epsilon) = 2\sqrt{2} + \epsilon$.
      ii. En déduire l'existence d'un rationnel r_ϵ tel que $f(r_\epsilon) < 2\sqrt{2} + \epsilon$.
   (c) Conclure.
4. a est-il le plus petit élément de A?

Exercice 4 : Vers la topologie et la connexité

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est ouverte si A est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire que si $\forall a \in A, \exists I \subset A$, I un intervalle ouvert non trivial, tel que $a \in I$. On dit que $F \subset \mathbb{R}$ est fermée si $A = \mathbb{R}/F$ est ouverte.
Montrer que les parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.
On dit alors que $\mathbb{R}$ est connexe.

Exercice 5 : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Nous allons ici faire l'inventaire des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Soit G un tel sous-groupe, distinct de $\{0\}$.

1. Justifier que $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ existe, et qu'il est soit nul, soit strictement positif. Dans un premier temps, nous supposerons que a est strictement positif.
   (a) Montrer que $a \in G$. On supposera par l'absurde que $a \notin G$, on montrera l'existence de $u, v \in G$, $a < u < v < 2a$, et on regardera $v - u$ (faire un dessin)
   (b) Montrer que $G = a\mathbb{Z}$ (on écrira une division euclidienne).

   On suppose maintenant $a = 0$.
   (a) Soit $x < y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $w \in G, 0 < w < y - x$.
   (b) Montrer qu'alors $x < \lfloor(\frac{x}{w})\rfloor w < y$.
   (c) Qu'a-t-on montré?
2. En déduire l'inventaire des groupes additifs de $\mathbb{R}$. Donner un exemple pour chaque cas possible. Cette alternative est à connaître absolument, et idéalement la démonstration..

Exercice 6 : Une recherche de point fixe

L'objet de cet exercice est de montrer que si $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ est croissante, alors elle admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $(f(x) = x)$.

1. Rappeler un exercice similaire avec une autre hypothèse que croissante (facultatif, mais important..)
2. On pose $E = \{x \in [0;1], f(x) \leq x\}$. Montrer que E admet une borne inférieure. On la note a.
3. Montrer que $f(a)$ est un minorant de E. En déduire que $f(a) \leq a$.
4. On suppose $a > 0$. Montrer que pour $x \in [0; a[$, $f(x) > x$. En déduire que $f(a) \geq a$.
5. Conclure. Il y a-t-il unicité d'un tel point fixe?
6. Quid d'une fonction décroissante de $[0;1]$ dans lui-même?

Exercice 7

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \cos x}$ en effectuant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. Bien que peu divertissant, ce changement de variable est très utile, et savoir retrouver les expressions de cos sin et tan en fonction de ce dernier est essentiel.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

L'Homme irrationnel de Michel Mendes-France.

Exercice 1

Calculer $\displaystyle\int_0^1 x \cdot \arctan(x)^2 dx$.

Exercice 2

Soit f une fonction bornée sur $\mathbb{R}$. On pose $||f||_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}}(|f(x)|)$. Montrer proprement que :

1. $||f||_\infty$ est dans $\mathbb{R}_+$
2. $||f||_\infty = 0 \implies f = 0$
3. Si f, g sont bornées, $||f+g||_\infty \leq ||f||_\infty + ||g||_\infty$
4. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda f||_\infty = |\lambda| ||f||_\infty$.

Exercice 3 : Recherche d'une borne inférieure

On cherche à déterminer la borne inférieure de $A = \left\{ \frac{p}{q} + 2\frac{q}{p}, (p,q) \in \mathbb{N}^* \right\}$.

1. Justifier qu'elle existe. On la note a.
2. Dresser le tableau de variations de $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x + \frac{2}{x}$.
3. Nous allons montrer que $a = 2\sqrt{2}$.
   (a) Justifier que c'est bien un minorant.
   (b) Soit $\epsilon > 0$.
      i. Justifier qu'il existe $x_\epsilon \in]\sqrt{2}, +\infty[$ tel que $f(x_\epsilon) = 2\sqrt{2} + \epsilon$.
      ii. En déduire l'existence d'un rationnel r_ϵ tel que $f(r_\epsilon) < 2\sqrt{2} + \epsilon$.
   (c) Conclure.
4. a est-il le plus petit élément de A?

Exercice 4 : Vers la topologie et la connexité

On dit qu'une partie A de $\mathbb{R}$ est ouverte si A est un voisinage de chacun de ses points, c'est à dire que si $\forall a \in A, \exists I \subset A$, I un intervalle ouvert non trivial, tel que $a \in I$. On dit que $F \subset \mathbb{R}$ est fermée si $A = \mathbb{R}/F$ est ouverte.
Montrer que les parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$.
On dit alors que $\mathbb{R}$ est connexe.

Exercice 5 : Sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$

Nous allons ici faire l'inventaire des sous-groupes additifs de $\mathbb{R}$. Soit G un tel sous-groupe, distinct de $\{0\}$.

1. Justifier que $a = \inf(G \cap \mathbb{R}_+^*)$ existe, et qu'il est soit nul, soit strictement positif. Dans un premier temps, nous supposerons que a est strictement positif.
   (a) Montrer que $a \in G$. On supposera par l'absurde que $a \notin G$, on montrera l'existence de $u, v \in G$, $a < u < v < 2a$, et on regardera $v - u$ (faire un dessin)
   (b) Montrer que $G = a\mathbb{Z}$ (on écrira une division euclidienne).

   On suppose maintenant $a = 0$.
   (a) Soit $x < y \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $w \in G, 0 < w < y - x$.
   (b) Montrer qu'alors $x < \lfloor(\frac{x}{w})\rfloor w < y$.
   (c) Qu'a-t-on montré?
2. En déduire l'inventaire des groupes additifs de $\mathbb{R}$. Donner un exemple pour chaque cas possible. Cette alternative est à connaître absolument, et idéalement la démonstration..

Exercice 6 : Une recherche de point fixe

L'objet de cet exercice est de montrer que si $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ est croissante, alors elle admet un point fixe, c'est à dire qu'il existe $x \in [0,1]$ tel que $(f(x) = x)$.

1. Rappeler un exercice similaire avec une autre hypothèse que croissante (facultatif, mais important..)
2. On pose $E = \{x \in [0;1], f(x) \leq x\}$. Montrer que E admet une borne inférieure. On la note a.
3. Montrer que $f(a)$ est un minorant de E. En déduire que $f(a) \leq a$.
4. On suppose $a > 0$. Montrer que pour $x \in [0; a[$, $f(x) > x$. En déduire que $f(a) \geq a$.
5. Conclure. Il y a-t-il unicité d'un tel point fixe?
6. Quid d'une fonction décroissante de $[0;1]$ dans lui-même?

Exercice 7

Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3 + \cos x}$ en effectuant le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$. Bien que peu divertissant, ce changement de variable est très utile, et savoir retrouver les expressions de cos sin et tan en fonction de ce dernier est essentiel.