Exercice

On veut montrer que les parties ouvertes et fermées de $\mathbb{R}$ sont $\emptyset$ et $\mathbb{R}$. Déjà, il est facile de montrer qu'elles sont ouvertes et fermées.
Soit A une partie ouverte et fermée de $\mathbb{R}$. On suppose A non vide, et $A \neq \mathbb{R}$. On rappelle que A ouverte signifie que pour tout $x \in A$, il existe un intervalle ouvert non trivial de $\mathbb{R}$ contenant x et inclus dans A. A est ouverte, mais aussi fermée, donc son complémentaire, que je noterai B est également ouvert. De plus, B est non vide car $A \neq \mathbb{R}$. Il existe donc $a \in A$, $b \in B$. On les prend.
On suppose dans ce qui suit $a < b$ (l'autre cas est parfaitement symétrique).
On s'intéresse à la partie $C = \{x \in A, x < b\}$ (**Faire un dessin**). C'est une partie non vide de $\mathbb{R}$ (elle contient a) et majorée (par b). Elle admet donc une borne supérieure s. On a soit $s \in A$, soit $s \in B$ (car $A \cup B = \mathbb{R}$...). Si $s \in A$, comme A est ouverte, il existe un intervalle ouvert non trivial I contenant s inclus dans A. (**Faire un dessin**) I est ouvert non trivial, il contient donc s' tel que $s < s' < b$. Mais $I \subset A$ donc $s' \in A$, et $s' < B$ donc $s' \in C$. Ceci contredit la maximalité de s. (**Compléter le dessin précédent..**)
Donc $s \in B$. Mais B ouverte, donc contient un intervalle ouvert I contenant s. (**Faire un dessin**). On prend alors $s' < s \in I$. Alors $\forall s' < x < s$, $x \notin C$. Ceci contredit le fait que s est la borne supérieure de C. (**Compléter le dessin précédent...**).
C'est (beaucoup) détaillé, mais des dessins bien faits éclairent très bien. C'est une introduction à la notion d'ouverts et de fermés qui sera étudiée plus en profondeur l'an prochain...