



*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*



### Exercice 1

Soit la suite  $(u_n)$  définie pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par  $u_0 = a$  et  $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{u_n^2}$ .

- Déterminer deux valeurs de  $a$  pour lesquelles  $(u_n)$  n'est pas définie puis montrer que si  $a > 0$  alors  $(u_n)$  est bien définie.
- Etudier son comportement asymptotique.

### Exercice 2

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  une suite de réels et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  la suite définie par  $v_n = \frac{u_1 + \dots + u_n}{n}$ .

- Montrer que si  $(u_n)$  converge vers  $L$  alors il en est de même pour  $(v_n)$
- En déduire que si  $(u_{n+1} - u_n)$  converge vers  $L$  alors il en est de même pour  $\left(\frac{u_n}{n}\right)$ .

### Exercice 3

Soit  $\text{for all } n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) = x^n - x - n$ .

- Montrer que  $f_n$  s'annule une et une seule fois sur  $[1; +\infty[$ . Soit  $x_n$  sa racine.
- Montrer que  $\forall n \geq 2, n^{\frac{2}{n}} \leq n$  et en déduire que  $f_n(n^{\frac{2}{n}}) \geq 0$ .
- Montrer que  $(x_n)$  converge et déterminer sa limite.

### Exercice 4 : Lemme de Fekete

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels telle que, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $u_{m+n} \geq u_m + u_n$ . On suppose que l'ensemble  $\left\{\frac{u_n}{n}; n \in \mathbb{N}^*\right\}$  est majoré, et on note  $\ell$  sa borne supérieure.

- Pourquoi  $\ell$  est bien définie?
- Soit  $m, q, r \in \mathbb{N}$ . On pose  $n = mq + r$ . Comparer  $u_n$  et  $qu_m + u_r$ .
- On fixe  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$ . En utilisant la division euclidienne de  $n$  par  $m$ , démontrer qu'il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n > N$ ,  $\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$ .
- Démontrer que  $\frac{u_n}{n} \rightarrow \ell$ .

### Exercice 5 : Lemme de la grenouille

Soit  $(u_n)$  une suite qui piétine, c'est à dire que  $u_{n+1} - u_n$  tend vers 0.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $u$  est un intervalle.
2.  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue,  $u_0 \in [0, 1]$ .
  - (a) Justifier qu'on définit une suite par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - (b) Montrer que  $(u_n)$  converge si et seulement si  $(u_n)$  piétine.
  - (c) Est-ce vrai en général?

### Exercice 6 : Fonction de Thomae

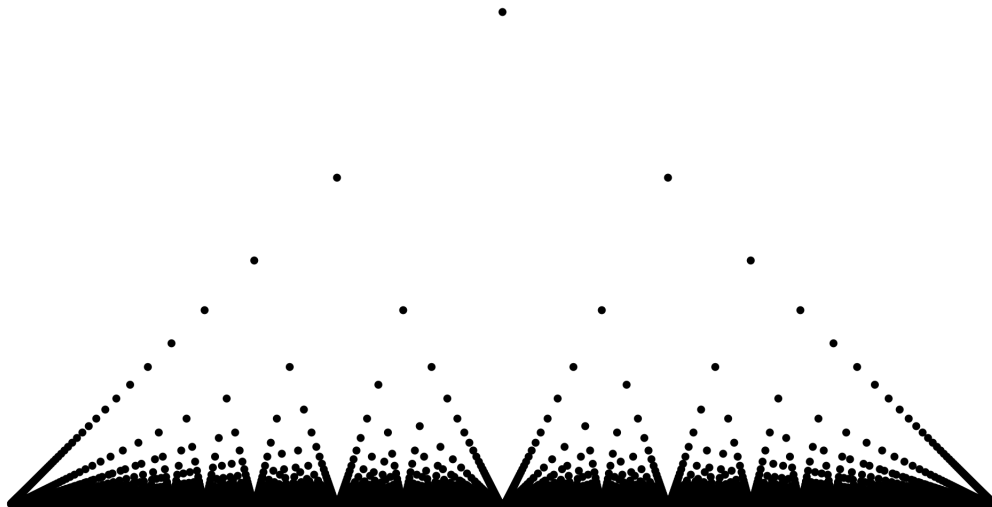
Nous allons construire une fonction continue en tout les irrationnels, et discontinue en tout les rationnels. La continuité n'a pas encore été étudiée, la définition prise sera donc : Une fonction  $f$  est dite continue en  $x$  si pour toute suite  $(x_n)$  de limite  $x$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

1. Soit  $\alpha > 0$  un nombre irrationnel,  $p_n$  et  $q_n$  des entiers positifs tels que  $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha$ . Justifier que  $p_n \rightarrow +\infty$ , et que  $q_n \rightarrow +\infty$ .
2. On définit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{pgcd}(p, q) = 1. \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer alors que  $f$  convient.

3. Montrer que  $f$  est 1- périodique. On pourra montrer, au milieu de l'hiver, qu'elle est également dérivable nulle part. On peut aussi montrer que tout rationnel est un maximum local, que la fonction est intégrable (!) d'intégrale égale à ... 0 sur tout intervalle. Bref, c'est une fonction pathologique, dont voici le tracé sur  $(0; 1)$  :





*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*



### Exercice 1

Soit  $(x_n)$  définie par  $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ . Pour quels  $x_0$  une telle suite est bien définie? Etudier alors son comportement asymptotique.

### Exercice 2

Soit  $f_n : x \mapsto \frac{x}{1+nx^2}$ . Soit  $u$  définie par  $u_1 > 0, u_{n+1} = f(u_n)$ .

1. Justifier que  $u$  est bien définie.
2. Montrer que pour  $n \geq 2$ ,  $u_n \leq \frac{1}{n}$ .
3. Montrer que  $(nu_n)$  est croissante.
4. Montrer que  $nu_n \rightarrow 1$ . On regardera  $\frac{1}{u_{n+1}}$ ; et on utilisera librement le lemme de Césaro.

### Exercice 3

Soit  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) = x^n - nx + 1$ .

1. Montrer que pour tout  $n \geq 3$ ,  $f_n$  s'annule une et une seule fois sur  $[0; 1]$ . Soit  $x_n$  sa racine.
2. Calculer  $f_{n+1}(x_n)$  et en déduire le sens de variation puis la convergence de  $(x_n)$ .
3. Montrer que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $1 \leq nx_n \leq 2$ , déterminer la limite de  $(x_n)$  puis celle de  $(nx_n)$ .

### Exercice 4 : Lemme de Fekete

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels telle que, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $u_{m+n} \geq u_m + u_n$ . On suppose que l'ensemble  $\{\frac{u_n}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$  est majoré, et on note  $\ell$  sa borne supérieure.

1. Pourquoi  $\ell$  est bien définie?
2. Soit  $m, q, r \in \mathbb{N}$ . On pose  $n = mq + r$ . Comparer  $u_n$  et  $qu_m + u_r$ .
3. On fixe  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$ . En utilisant la division euclidienne de  $n$  par  $m$ , démontrer qu'il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n > N$ ,  $\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$ .
4. Démontrer que  $\frac{u_n}{n} \rightarrow \ell$ .

### Exercice 5 : Lemme de la grenouille

Soit  $(u_n)$  une suite qui piétine, c'est à dire que  $u_{n+1} - u_n$  tend vers 0.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $u$  est un intervalle.
2.  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue,  $u_0 \in [0, 1]$ .
  - (a) Justifier qu'on définit une suite par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - (b) Montrer que  $(u_n)$  converge si et seulement si  $(u_n)$  piétine.
  - (c) Est-ce vrai en général?

### Exercice 6 : Fonction de Thomae

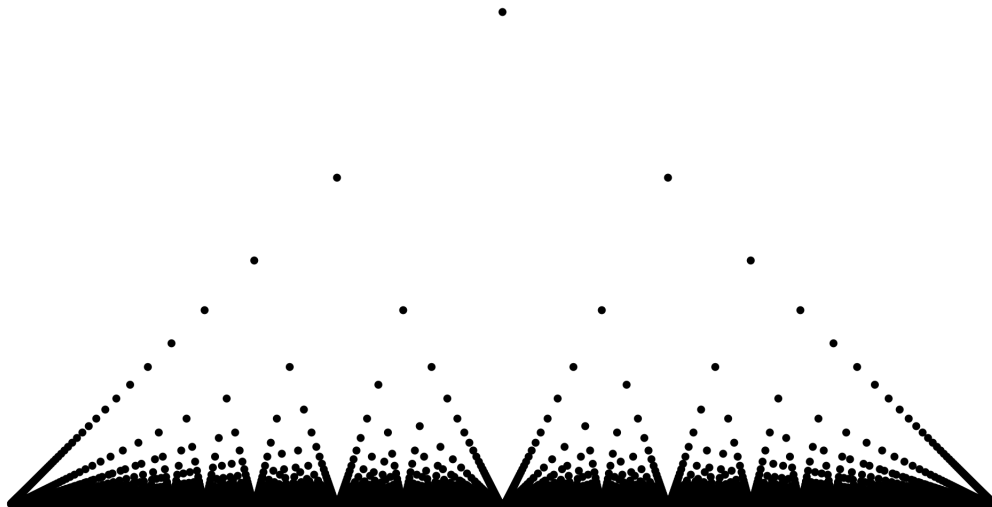
Nous allons construire une fonction continue en tout les irrationnels, et discontinue en tout les rationnels. La continuité n'a pas encore été étudiée, la définition prise sera donc : Une fonction  $f$  est dite continue en  $x$  si pour toute suite  $(x_n)$  de limite  $x$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

1. Soit  $\alpha > 0$  un nombre irrationnel,  $p_n$  et  $q_n$  des entiers positifs tels que  $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha$ . Justifier que  $p_n \rightarrow +\infty$ , et que  $q_n \rightarrow +\infty$ .
2. On définit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{pgcd}(p, q) = 1. \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer alors que  $f$  convient.

3. Montrer que  $f$  est 1- périodique. On pourra montrer, au milieu de l'hiver, qu'elle est également dérivable nulle part. On peut aussi montrer que tout rationnel est un maximum local, que la fonction est intégrable (!) d'intégrale égale à ... 0 sur tout intervalle. Bref, c'est une fonction pathologique, dont voici le tracé sur  $(0; 1)$  :





*Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.*



### Exercice 1

Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}$ .

Montrer que  $\forall k \in \mathbb{N}^*$  avec  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$  et en déduire la convergence de  $(S_n)$ .

### Exercice 2

Soit  $a$  et  $b$  des réels positifs tels que  $b \leq a$ ,  $(u_n)$  et  $(v_n)$  des suites vérifiant :  $u_0 = a$ ,  $v_0 = b$ ,  $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$  et  $v_{n+1} = \sqrt{u_n v_n}$ . Montrer alors qu'elles sont bien définies et ont même limite.

### Exercice 3

Soit  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \dots + x^2 + x - 1$ .

1. Montrer que  $f_n$  s'annule une et une seule fois sur  $[\frac{1}{2}; 1]$ . Soit  $x_n$  sa racine.
2. Calculer  $f_{n+1}(x_n)$  et en déduire le sens de variation puis la convergence de  $(x_n)$ .
3. En remarquant que pour  $n \geq 2$ ,  $x_n \leq x_2$ , déterminer la limite de  $x_n^{n+1}$  puis celle de  $(x_n)$ .

### Exercice 4 : Lemme de Fekete

Soit  $(u_n)_{n \geq 0}$  une suite de réels telle que, pour tout  $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ ,  $u_{m+n} \geq u_m + u_n$ . On suppose que l'ensemble  $\{\frac{u_n}{n}; n \in \mathbb{N}^*\}$  est majoré, et on note  $\ell$  sa borne supérieure.

1. Pourquoi  $\ell$  est bien définie?
2. Soit  $m, q, r \in \mathbb{N}$ . On pose  $n = mq + r$ . Comparer  $u_n$  et  $qu_m + u_r$ .
3. On fixe  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $\varepsilon > 0$ . En utilisant la division euclidienne de  $n$  par  $m$ , démontrer qu'il existe un entier  $N$  tel que, pour tout  $n > N$ ,  $\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$ .
4. Démontrer que  $\frac{u_n}{n} \rightarrow \ell$ .

### Exercice 5 : Lemme de la grenouille

Soit  $(u_n)$  une suite qui piétine, c'est à dire que  $u_{n+1} - u_n$  tend vers 0.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de  $u$  est un intervalle.
2.  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  continue,  $u_0 \in [0, 1]$ .
  - (a) Justifier qu'on définit une suite par  $u_{n+1} = f(u_n)$ .
  - (b) Montrer que  $(u_n)$  converge si et seulement si  $(u_n)$  piétine.
  - (c) Est-ce vrai en général?

### Exercice 6 : Fonction de Thomae

Nous allons construire une fonction continue en tout les irrationnels, et discontinue en tout les rationnels. La continuité n'a pas encore été étudiée, la définition prise sera donc : Une fonction  $f$  est dite continue en  $x$  si pour toute suite  $(x_n)$  de limite  $x$ ,  $f(x_n) \rightarrow f(x)$ .

1. Soit  $\alpha > 0$  un nombre irrationnel,  $p_n$  et  $q_n$  des entiers positifs tels que  $\frac{p_n}{q_n} \rightarrow \alpha$ . Justifier que  $p_n \rightarrow +\infty$ , et que  $q_n \rightarrow +\infty$ .
2. On définit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{pgcd}(p, q) = 1. \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer alors que  $f$  convient.

3. Montrer que  $f$  est 1- périodique. On pourra montrer, au milieu de l'hiver, qu'elle est également dérivable nulle part. On peut aussi montrer que tout rationnel est un maximum local, que la fonction est intégrable (!) d'intégrale égale à ... 0 sur tout intervalle. Bref, c'est une fonction pathologique, dont voici le tracé sur  $(0; 1)$  :

