Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = a$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n^2}$.

1. Déterminer deux valeurs de a pour lesquelles (u_n) n'est pas définie puis montrer que si $a > 0$ alors (u_n) est bien définie.
2. Etudier son comportement asymptotique, et en donner un équivalent.

Exercice 2

Soit (u_n) définie par $u_0 = 0, u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

1. Montrer que $u_n \leq n$
2. Montrer que $u_n = o(n)$
3. Trouver un équivalent simple de u_n.

Exercice 3

Soit $f : x \mapsto x + \ln(x)$, pour $x > 0$.

1. Montrer que l'équation $x + \ln(x) = n$ admet une unique solution notée x_n.
2. Montrer que (x_n) diverge.
3. En donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 4

Soit $foralln \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x^n - x - n$.

1. Montrer que f_n s'annule une et une seule fois sur $[1; +\infty[$. Soit x_n sa racine.
2. Montrer que $\forall n \geq 2, n^{\frac{2}{n}} \leq n$ et en déduire que $f_n(n^{\frac{2}{n}}) \geq 0$.
3. Montrer que (x_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 5 : Lemme de Fekete

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que, pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $u_{m+n}\geq u_m+u_n$. On suppose que l'ensemble $\left\{\frac{u_n}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ est majoré, et on note ℓ sa borne supérieure.

1. Pourquoi ℓ est bien définie?
2. Soit $m,q,r\in\mathbb{N}$. On pose $n=mq+r$. Comparer u_n et qu_m+u_r.
3. On fixe $m\in\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon>0$. En utilisant la division euclidienne de n par m, démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n>N$, $\frac{u_n}{n}\geq\frac{u_m}{m}-\varepsilon$.
4. Démontrer que $\frac{u_n}{n}\longrightarrow\ell$.

Exercice 6 : Lemme de la grenouille

Soit (u_n) une suite qui piétine, c'est à dire que $u_{n+1}-u_n$ tend vers 0.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intevalle.
2. $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ continue, $u_0\in[0,1]$.
   (a) Justifier qu'on définit une suite par $u_{n+1}=f(u_n)$.
   (b) Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) piétine.
   (c) Est-ce vrai en général?

Exercice 7 : Fonction de Thomae

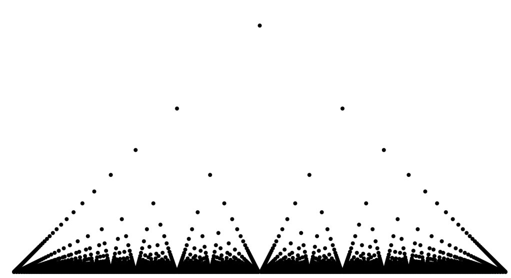
Nous allons construire une fonction continue en tout les irationnels, et discontinue en tout les rationnels. La continuité n'a pas encore été étudiée, la définition prise sera donc : Une fonction f est dite continue en x si pour toute suite (x_n) de limite x, $f(x_n)\longrightarrow f(x)$.

1. Soit $\alpha>0$ un nombre irationnel, p_n et q_n des entiers positifs tels que $\frac{p_n}{q_n}\longrightarrow\alpha$. Justifier que $p_n\longrightarrow+\infty$, et que $q_n\longrightarrow+\infty$.
2. On définit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q}, \text{pgcd}(p,q)=1.\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Montrer alors que f convient.

3. Montrer que f est 1- périodique. On pourra montrer, au milieu de l'hiver, qu'elle est également dérivable nulle part. On peut aussi montrer que tout rationnel est un maximum local, que la fonction est intégrable (!) d'intégrale égale à ... 0 sur tout intervalle. Bref, c'est une fonction pathologique, dont voici le tracé sur $(0;1)$:



Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit (x_n) définie par $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Pour quels x_0 une telle suite est bien définie? Etudier alors son comportement asymptotique, et en donner un équivalent.

Exercice 2

Soit $f_n : x \mapsto \frac{x}{1+nx^2}$. Soit u définie par $u_1 > 0, u_{n+1} = f_n(u_n)$.

1. Justifier que u est bien définie.
2. Montrer que pour $n \geq 2$, $u_n \leq \frac{1}{n}$.
3. Montrer que (nu_n) est croissante.
4. Montrer que $u_n \sim \frac{1}{n}$. On regardera $\frac{1}{u_{n+1}}$; et on utilisera librement le lemme de Césaro.

Exercice 3

Montrer que l'équation $x + e^x = n$ admet une unique solution, que l'on notera x_n. Trouver la limite de x_n, et en donner un équivalent.

Exercice 4

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x^n - nx + 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 3$, f_n s'annule une et une seule fois sur $[0;1]$. Soit x_n sa racine.
2. Calculer $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire le sens de variation puis la convergence de (x_n).
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq nx_n \leq 2$, déterminer la limite de (x_n) puis un équivalent de x_n.

Exercice 5 : Lemme de Fekete

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $u_{m+n} \geq u_m + u_n$. On suppose que l'ensemble $\left\{\frac{u_n}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est majoré, et on note ℓ sa borne supérieure.

1. Pourquoi ℓ est bien définie?
2. Soit $m, q, r \in \mathbb{N}$. On pose $n = mq + r$. Comparer u_n et $qu_m + u_r$.
3. On fixe $m \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon > 0$. En utilisant la division euclidienne de n par m, démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n > N$, $\frac{u_n}{n} \geq \frac{u_m}{m} - \varepsilon$.
4. Démontrer que $\frac{u_n}{n} \longrightarrow \ell$.

Exercice 6 : Lemme de la grenouille

Soit (u_n) une suite qui piétine, c'est à dire que $u_{n+1} - u_n$ tend vers 0.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intevalle.
2. $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ continue, $u_0 \in [0,1]$.
   (a) Justifier qu'on définit une suite par $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (b) Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) piétine.
   (c) Est-ce vrai en général?

Exercice 7 : Fonction de Thomae

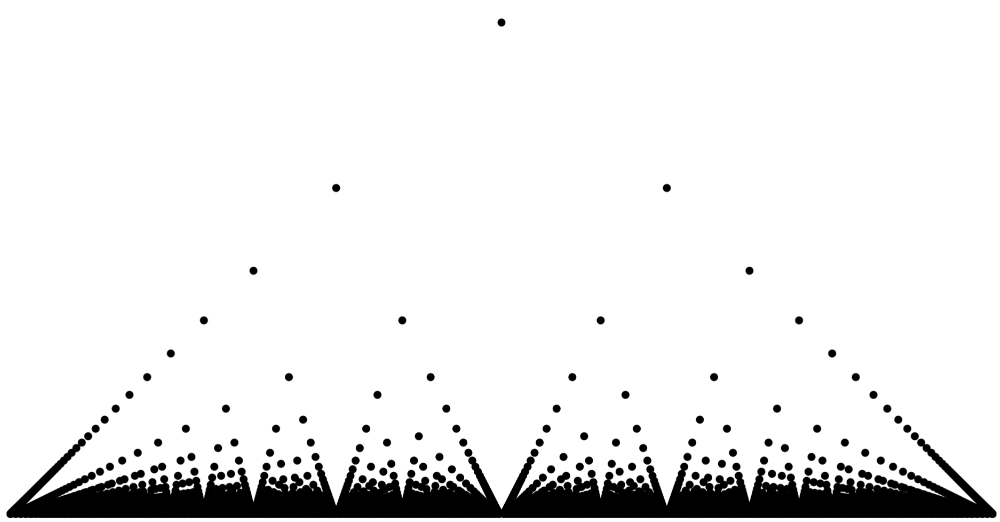
Nous allons construire une fonction continue en tout les irationnels, et discontinue en tout les rationnels. La continuité n'a pas encore été étudiée, la définition prise sera donc : Une fonction f est dite continue en x si pour toute suite (x_n) de limite x, $f(x_n) \longrightarrow f(x)$.

1. Soit $\alpha > 0$ un nombre irationnel, p_n et q_n des entiers positifs tels que $\frac{p_n}{q_n} \longrightarrow \alpha$. Justifier que $p_n \longrightarrow +\infty$, et que $q_n \longrightarrow +\infty$.
2. On définit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{si } x = \frac{p}{q}, \text{pgcd}(p,q) = 1. \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer alors que f convient.

3. Montrer que f est 1- périodique. On pourra montrer, au milieu de l'hiver, qu'elle est également dérivable nulle part. On peut aussi montrer que tout rationnel est un maximum local, que la fonction est intégrable (!) d'intégrale égale à ... 0 sur tout intervalle. Bref, c'est une fonction pathologique, dont voici le tracé sur $(0;1)$:



Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Montrer que si $P_n = X^n - nX + 1$, P_n a une unique racine dans $[0, 1]$ pour $n \geq 2$. En donner un équivalent, et un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 2

Montrer que l'équation $x_n = tan(x_n)$ admet une unique solution dans $(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2})$. En donner un équivalent, puis un développement asymptotique à deux termes.

Exercice 3

Soit $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = x^n + x^{n-1} + \ldots + x^2 + x - 1$.

1. Montrer que f_n s'annule une et une seule fois sur $[\dfrac{1}{2}; 1]$. Soit x_n sa racine.
2. Calculer $f_{n+1}(x_n)$ et en déduire le sens de variation puis la convergence de (x_n).
3. En remarquant que pour $n \geq 2$, $x_n \leq x_2$, déterminer la limite de x_n^{n+1} puis celle de (x_n).

Exercice 4

On pose $u_1 > 0$, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{n}$.

1. Montrer par l'absurde que (u_n) n'est pas croissante.
2. Montrer qu'elle décroit à partir d'un certain rang.
3. Montrer qu'elle tend vers 0.
4. En donner une formule explicite.
5. Montrer que $\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{n} \sim \frac{2^{n+1}}{n}$ (on pourra utiliser librement le théorème de sommations des relations de comparaison)
6. Donner un équivalent de u_n.

Exercice 5 : Lemme de Fekete

Soit $(u_n)_{n\geq 0}$ une suite de réels telle que, pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, $u_{m+n}\geq u_m+u_n$. On suppose que l'ensemble $\left\{\frac{u_n}{n};\ n\in\mathbb{N}^*\right\}$ est majoré, et on note ℓ sa borne supérieure.

1. Pourquoi ℓ est bien définie?
2. Soit $m,q,r\in\mathbb{N}$. On pose $n=mq+r$. Comparer u_n et qu_m+u_r.
3. On fixe $m\in\mathbb{N}^*$ et $\varepsilon>0$. En utilisant la division euclidienne de n par m, démontrer qu'il existe un entier N tel que, pour tout $n>N$, $\frac{u_n}{n}\geq\frac{u_m}{m}-\varepsilon$.
4. Démontrer que $\frac{u_n}{n}\longrightarrow\ell$.

Exercice 6 : Lemme de la grenouille

Soit (u_n) une suite qui piétine, c'est à dire que $u_{n+1}-u_n$ tend vers 0.

1. Montrer que l'ensemble des valeurs d'adhérence de u est un intevalle.
2. $f:[0,1]\longrightarrow[0,1]$ continue, $u_0\in[0,1]$.
   (a) Justifier qu'on définit une suite par $u_{n+1}=f(u_n)$.
   (b) Montrer que (u_n) converge si et seulement si (u_n) piétine.
   (c) Est-ce vrai en général?

Exercice 7 : Fonction de Thomae

Nous allons construire une fonction continue en tout les irationnels, et discontinue en tout les rationnels. La continuité n'a pas encore été étudiée, la définition prise sera donc : Une fonction f est dite continue en x si pour toute suite (x_n) de limite x, $f(x_n)\longrightarrow f(x)$.

1. Soit $\alpha>0$ un nombre irationnel, p_n et q_n des entiers positifs tels que $\frac{p_n}{q_n}\longrightarrow\alpha$. Justifier que $p_n\longrightarrow+\infty$, et que $q_n\longrightarrow+\infty$.
2. On définit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\notin\mathbb{Q}\\ \frac{1}{q} & \text{si } x=\frac{p}{q}, \text{pgcd}(p,q)=1.\\ 1 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Montrer alors que f convient.

3. Montrer que f est 1- périodique. On pourra montrer, au milieu de l'hiver, qu'elle est également dérivable nulle part. On peut aussi montrer que tout rationnel est un maximum local, que la fonction est intégrable (!) d'intégrale égale à ... 0 sur tout intervalle. Bref, c'est une fonction pathologique, dont voici le tracé sur $(0;1)$: