Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
Déterminer le noyau de A.

Exercice 2

$A \in M_n(\mathbb{R})$ est dite "unipotente" si : $\exists p \in \mathbb{N}^*, (A - I_n)^p = 0$.

1. Montrer qu'une matrice A unipotente est inversible.
2. Montrer que son inverse est unipotente.
3. Montrer que toute puissance de A est unipotente.

Exercice 3

On considère les matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calculer A^2, A^3. En déduire la valeur de A^n pour tout $n \geq 1$. Répondre aux mêmes questions pour B.

Exercice 4

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = 2I_3 - A$, en déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice 5

Les questions sont indépendantes.

1. On dit que A est stochastique dès que la somme des termes de chaque ligne de A vaut 1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit.
2. Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
3. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-Ã -dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AM = MA$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$

Déterminer le noyau de A.

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, A^2 + \lambda A + \mu I_2 = 0_2$.
2. Trouver le reste dans la division euclidienne de X^n par $X^2 + \lambda X + \mu$.
3. En déduire A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 3

Soit $(x_n), (y_n), (z_n)$ des suites vérifiant :

$$x_{n+1} = 3x_n + 2y_n + 2z_n;$$

$$y_{n+1} = -x_n - z_n;$$

$$z_{n+1} = x_n + y_n + 2z_n.$$

Ecrire le problème sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $X_n = (x_n, y_n, z_n)^T$. Calculer les puissances de A, en déduire X_n.

Exercice 4

Les questions sont indépendantes.

1. On dit que A est stochastique dès que la somme des termes de chaque ligne de A vaut 1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit.
2. Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
3. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-Ã -dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AM = MA$.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$

Déterminer le noyau de A.

Exercice 2

Soit (x_n) et (y_n) vérifiant $x_{n+1} = 3x_n + y_n$ et $y_{n+1} = x_n + 3y_n$.Ecrire ceci sous la forme $X_{n+1} = AX_n$ où $X_n = (x_n, y_n)^T$, calculer les puissances de A, puis donner X_n pour tout n.

Exercice 3

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = A - I.$$

Calculer B^n pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire A^n.

Exercice 4

Déterminer ker(A) et calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$ dans chacun des cas suivants :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \dots & \dots & \vdots \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$
3. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice 5

Les questions sont indépendantes.

1. On dit que A est stochastique dès que la somme des termes de chaque ligne de A vaut 1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit.
2. Déterminer deux éléments A et B de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ tels que : $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
3. Déterminer le centre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-Ã -dire l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a $AM = MA$.