Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 7 & 11 \end{pmatrix}$
Déterminer le noyau de A.

Exercice 2

Soit $E = \{P \in \mathbb{R}[X], P^2 = 0\}$. Montrer que E est un espace vectoriel.

Exercice 3

1. Soient $u = (1; -1; 1), v = (2; -1; 3)$ et $w = (-1; 1; -1)$ une famille de $\mathbb{R}^3$.
   Constitue-t-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
2. Soit (u, v, w) une famille libre d'un $\mathbb{K}$-ev E. On pose $i = v + w, j = u + w$ et $k = u + v$. W La famille (i, j, k) est-elle libre ?

Exercice 4

Soit $N \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n(x) = cos(nx)$.
Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_n f_m$ puis montrer que la famille $(f_i)_{i=1...N}$ est libre.

Exercice 5(Dépasse légèrement le programme de colle : facultatif)

Soient $F = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 0\}$ et $G = \{(t - s; t + s; t - 3s), t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}\}$.

1. Vérifier que F et G sont des ev et déterminer une base de chacun de ces espaces.
2. Déterminer $F \cap G$ et une base de ce sev.

Exercice 6(Dépasse légèrement le programme de colle : facultatif)

On considère l'ensemble E des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $(X^2 + 1)P'' - 6P = 0$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que E est une droite vectorielle dont on déterminera une base.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 8 & 10 \end{pmatrix}$
Déterminer le noyau de A.

Exercice 2

On dit que A est stochastique dès que la somme des termes de chaque ligne de A vaut 1. Montrer que l'ensemble des matrices stochastiques est stable par produit.

Exercice 3

Soit $(\alpha_i)_{i=1\dots n} \in \mathbb{R}^n$ et pour tout $i = 1\dots n$, $f_i(x) = e^{\alpha_i x}$. Montrer que la famille $(f_i)_{i=1\dots n}$ est libre.

Exercice 4

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de la base canonique soient $u = (1;1;2), v = (1;0;-1)$, $w = (0;1;2)$
On pose $F = vect(u,v)$ et $G = vect(w)$.

1. Soit $a = (1;2;3)$. Est-il vrai que $a \in F$? Que $a \in G$?
2. Déterminer $F \cap G$.
3. la famille (u,v,w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 5(Dépasse légèrement le programme de colle : facultatif)

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions paires, $\mathcal{I}$ celui des fonctions impaires. Vérifier que ce sont bien des espaces vectoriels, puis montrer que $\mathcal{P} + \mathcal{I} = E$ et que $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$. On dit que ces deux espaces sont supplémentaires.

Exercice 6 (Dépasse légèrement le programme de colle : facultatif)

Soit $H = \{(x_1;x_2;\dots;x_n) \in \mathbb{R}^n, x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$.

1. Vérifier que H est un ev.
2. $\forall i \in \{2:\dots;n\}$, on pose $e_i = (1;0;\dots;-1;0;\dots;0) \in \mathbb{R}^n$ (-1 en i-ième position).
   Montrer que $(e_i)_{i=2;\dots;n}$ est une famille de H.
3. $(e_i)_{i=2;\dots;n}$ est-elle une base de H ?
4. Soit $e_1 = (1,1,1...,1)$. Montrer que $E = \text{Vect}(e_1) + H$, et que ces deux espaces sont en somme directe.

Il n'est pas nécessaire de traiter tous les exercices pour obtenir la note maximale. Réussir quelques exercices avec honnêteté, en montrant une bonne connaissance du cours et une bonne capacité à dialoguer suffit à obtenir une excellente note. Il est possible d'obtenir une correction de certains exercices, en me contactant par mail.

Exercice 1

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Déterminer le noyau de A.

Exercice 2

Soient les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u = (3; 2; -1), v = (1; 1; 0), w = (2; 1; -1)$ et $t = (0; 1; 1)$.

1. La famille (u, v) est-elle libre ?
2. La famille (u, v, w) est-elle une base de $\mathbb{R}^3$?
3. Comparer $vect(u, v)$ et $vect(w, t)$.

Exercice 3

Soit E un $\mathbb{C} - ev$. Une famille libre de E comme $\mathbb{C} - EV$ est-elle libre comme $\mathbb{R} - ev$? Et dans l'autre sens? Et en remplacant libre par génératrice? On suppose que E possède une base comme $\mathbb{C} - ev$. Montrer qu'il admet une base comme $\mathbb{R} - ev$.

Exercice 4

Soit $(\alpha_i)_{i=1\dots n}$ une famille de réels distincts et pour tout $i = 1 \dots n$, $f_i(x) = |x - \alpha_i|$.
Montrer que la famille $(f_i)_{i=1\dots n}$ est libre.

Exercice 5 (Dépasse légérement le programme de colle : facultatif)

Soit $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, F le sous espace des fonctions nulle en 0, et G l'espace des fonctions constantes. Vérifier que F et G sont des espaces vectoriels, puis montrer que $F + G = E$ et que $F \cap G = \{0\}$. On dit qu'ils sont supplémentaires.